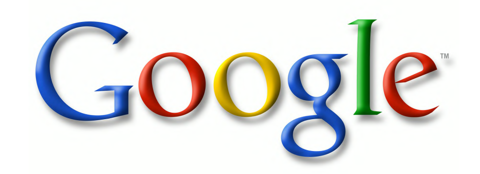


OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 75.

ABHANDLUNG

ÜBER

DIE HERLEITUNG ALLER

KRYSTALLOGRAPHISCHER SYSTEME

MIT IHREN UNTERABTHEILUNGEN

AUS EINEM EINZIGEN PRINZIPE

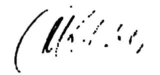
VON

AXEL GADOLIN.

(1867.)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.





Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, nicht zum kleinsten Maasse durch die Ausbildung und Verbreitung der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w. bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. P. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Chemie und Krystallographie:

Nr. 3. **J. Dalton** u. **W. H. Wollaston,** Abhandlungen zur Atomtheorie. (1803—1808.) Herausg. v. W. Ostwald. Mit 1 Taf. (30 S.) *M* —.50.

» 4. **Gay-Lussac,** Über das Jod. (1814.) Herausgegeben v. W. Ostwald. (52 S.) *M* —.80.

» 8. **A. Avogadro** u. **Ampère,** Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Taf. Herausg. von W. Ostwald. (50 S.) *M* 1.20.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

Abhandlung

über

die Herleitung aller

KRYSTALLOGRAPHISCHER SYSTEME

mit ihren Unterabtheilungen

aus einem einzigen Prinzipe

von

AXEL GADOLIN.

(Gelesen den 19. März 1867.)

Deutsch herausgegeben

von

P. Groth.

Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1896.

Inhaltsverzeichniss.

[1] Ueber die

Herleitung aller krystallographischer Systeme

mit ihren Unterabtheilungen aus einem einzigen Principe

von

Axel Gadolin.

Einleitung.

Ausser den allgemeinen Gesetzen, welche alle Krystallformen beherrschen (ebene Gestalt der Flächen, Constanz der Winkel und Rationalität der Parameterverhältnisse auf gewissen Axen), hat man mehrere Specialgesetze entdeckt, welche nur bestimmte Gruppen von Krystallen umfassen. Es sind dies die unter dem Namen »Krystallsysteme« bekannten Gruppen mit ihrer weiteren Unterabtheilung in holoëdrische, hemiëdrische, tetartoëdrische und hemimorphe Gruppen. Die letzteren sind nicht alle zu gleicher Zeit aufgestellt worden, sondern mehrfach haben die Ergebnisse neuer Untersuchungen über die Krystalle zur Bildung neuer derartiger Gruppen geführt, um jede untersuchte Krystallreihe auf eine jener Gruppen beziehen zu können. Einige Forscher sind sogar noch weiter gegangen und haben die Existenz von Gruppen, welche man bisher in der Natur noch nicht gefunden hatte, vorhergesagt. Bei diesen, einigemale von Erfolg gekrönten Voraussagungen liess man sich von gewissen Analogien leiten, welche man zwischen den bereits bekannten Gruppen bemerkt hatte. Die Existenz solcher Analogien führte uns nun zu der Idee, dass alle, existirenden oder möglichen, krystallographischen Gruppen von einem einzigen Principe abgeleitet werden könnten, so

dass sie nur die nothwendigen Folgerungen desselben wären. Die Auseinandersetzung und Entwickelung dieses Principes ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Die innigen Beziehungen, welche zwischen der äusseren Form der Krystalle und deren physikalischen Eigenschaften bestehen, sind wohlbekannt. Der allgemeine Charakter derselben kann auf folgende Art ausgedrückt werden: zwei Richtungen, welche in Bezug auf die äussere Form des Krystalls gleich gelegen sind, zeigen auch identisches physikalisches Verhalten. Dieses Princip ist so allgemein anerkannt, dass nicht selten die definitive Zugehörigkeit einer Krystallreihe zu einer oder der anderen krystallographischen Gruppe auf die physikalischen Eigenschaften der Krystalle gegründet worden ist. Indessen wäre es nicht rationell, die Classification der Krystalle lediglich auf die Natur ihrer physikalischen Eigenschaften, im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes, zu gründen. Berücksichtigt man aber, dass die äussere Form der Krystalle selbst [2] nur eine Folge der Wirkungsweise der Molekularkräfte ist, so ist man berechtigt, die Gesetze, welche diese Formen beherrschen, als physikalische Qualitäten zu betrachten. Diese Auffassung verträgt sich sehr wohl mit den innigen Beziehungen, welche zwischen der äusseren Form und den übrigen physikalischen Eigenschaften der Krystalle existiren, denn diese hängen ihrerseits im Grunde auch nur von der Wirkung derselben Molekularkräfte ab. Diese Erwägungen führen dazu, der Betrachtung der in Bezug auf die äussere Form der Krystalle gleich gelegenen Richtungen eine ganz besondere Bedeutung zuzuschreiben. Der Kürze halber werden wir solche Richtungen einfach »gleiche« Richtungen nennen. Auf diesen Begriff wird nun unsere Classification der Krystalle gegründet, in der Weise, dass wir in die gleiche Gruppe diejenigen Krystalle stellen, in denen die Zahl und die Anordnung der gleichen Richtungen dieselbe ist, und dass wir als verschiedenartig nur solche Gruppen anerkennen, welche sich in Bezug auf die Anordnung der gleichen Richtungen unterscheiden. Weiterhin wird gezeigt werden, dass, wenn man das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse annimmt, die Zahl der verschiedenen, auf die erwähnte Art gebildeten Gruppen auf 32 beschränkt ist. Die Mehrzahl dieser Gruppen ist identisch mit den bisher aufgestellten, und zwar befindet sich unter den jetzt anerkannten keine einzige, deren Existenz als unbestreitbar betrachtet werden könnte, und welche nicht mit einer unserer

theoretischen Gruppen zusammenfiele. Andererseits aber befinden sich unter unseren Gruppen einige, für die noch keine Repräsentanten in der Natur entdeckt sind. Dies kann zwei Ursachen haben: entweder wären solche Formen überhaupt unmöglich, oder man hätte sie noch nicht entdeckt, obgleich sie existiren. Im ersten Falle bleibt noch ein Naturgesetz aufzufinden, und so lange dies nicht geschehen ist, darf man erwarten, Krystalle zu entdecken, welche zu einer dieser Gruppen gehören, deren Existenz auf jene Weise vorhergesagt wurde. Diese Vorhersagungen unterscheiden sich von denen, welche Naumann gemacht hat, dadurch, dass Letzterer sich in dieser Beziehung nur durch partielle Analogien leiten liess, während unsere Vorhersagungen eine nothwendige Folge des angenommenen Principes sind. Wenn daher eine seiner Vorhersagungen sich als unbegründet zeigte, so würde dies nur beweisen, dass die vorausgesetzte Analogie nicht vorhanden ist, während, wenn eine unserer Vorhersagungen sich als falsch erwiese, dies zur Entdeckung eines neuen Naturgesetzes führen würde*). Ausserdem erheben unsere Voraussagungen den Anspruch, vollständig zu sein; wären sie es nicht, so würde unser ganzes System falsch sein, während das von Naumann adoptirte durch die Entdeckung einer von ihm nicht vorausgesehenen Gruppe [3] keinerlei Einbusse erleiden würde. Einige unserer theoretischen Gruppen sind identisch mit den auch von Naumann vorhergesagten, aber andere hat er nicht angegeben, ebenso wie es von ihm angenommene Gruppen giebt, welche wir nicht als solche anerkennen. Diese Abweichungen werden in Kap. IV und VII im Einzelnen discutirt werden.

[4]

Kapitel I.

Ueber die Gleichheit der Richtungen.

§ 1. In einer Krystallreihe wollen wir *gleich* zwei Richtungen A und B (Fig. 1)**) nennen, wenn zu jedem gegebenen Paare von Flächen a und b *correspondirende* Flächen a' und b' existiren, derart, dass die letzteren sowohl unter einander als mit der Richtung B die gleichen Winkel einschliessen, wie die Flächen a und b mit einander und mit der Richtung A.

---

*) Vgl. weiterhin Kap. V.

**) S. folg. S. und die Erklärung der Figuren am Schlusse.

In besonderen Fällen kann eine der Flächen a' und b' oder können beide mit einer oder beiden Flächen a und b zusammenfallen. Die Gleichheit der Richtungen A und B hängt also ab von der Gleichheit der Bögen: $Aa = Ba'$, $Ab = Bb'$, $ab = a'b'$, welches auch die Flächen a und b seien. Die Gleichheit zweier Richtungen kann sich unter zwei verschiedenen Modalitäten darstellen, welche wir *Deckgleichheit* resp.

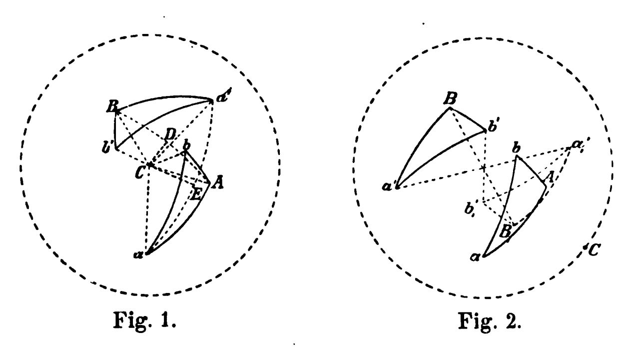


Fig. 1. Fig. 2.

symmetrische Gleichheit nennen wollen. Die Deckgleichheit findet statt, wenn die Flächen a und b in Bezug auf die Richtung A in demselben Sinne angeordnet sind, wie ihre correspondirenden Flächen a' und b' in Bezug auf die Richtung B *). Dagegen ist symmetrische Gleichheit vorhanden, wenn die Flächen a und b in Bezug [5] auf die Richtung A im entgegengesetzten Sinne angeordnet sind zu demjenigen, in welchem ihre correspondirenden Flächen in Bezug auf die Richtung B liegen (Fig. 2).

---

*) Um in präciser Weise zu definiren, was wir unter dem Ausdrucke »*in demselben Sinne* oder *im entgegengesetzten Sinne angeordnet* in Bezug auf zwei gegebene Richtungen« verstehen, denke sich der Leser in die Gerade A so gestellt, dass sich seine Füsse im Centrum der Kugel und sein Kopf im Punkte A auf deren Oberfläche befinden, während sein Gesicht gegen den Punkt a gewendet ist. Wenn der Punkt b alsdann zu seiner Rechten liegt, und er sich hierauf in derselben Weise in die Richtung B stellt und den Punkt a' ansieht, und wenn der Punkt b' sich dann ebenfalls auf seiner rechten Seite befindet, so sagen wir, dass die Flächen a und b in Bezug auf die Richtung A in demselben Sinne angeordnet sind, wie ihre correspondirenden Flächen in Bezug auf die Richtung B. Dasselbe findet auch statt, wenn in beiden Stellungen

Wir gehen nunmehr zu der Untersuchung der verschiedenen möglichen Arten der Anordnung gleicher Richtungen über; es mag hier nochmals daran erinnert werden, dass es das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse ist, welches die Anzahl dieser verschiedenen Anordnungen einschränkt.

Kapitel II.

Ueber die Deckaxen.

§ 2. Wenn in einem Krystall zwei Richtungen existiren, welche Deckgleichheit besitzen, so giebt es stets eine bestimmte Richtung, um welche man den Krystall um einen gewissen Winkel drehen kann, derart, dass jede Fläche in diejenige Stellung gelangt, welche die ihr correspondirende Fläche vor der Drehung inne hatte. (Wir sagen, dass zwei Flächen »zusammenfallen«, »zur Deckung« oder »in dieselbe Stellung gelangen«, wenn sie parallel geworden sind, und gleichzeitig ihre nach dem Innern des Krystalls gezogenen Normalen nach derselben Seite gerichtet sind.) Es mögen zwei Ebenen DC und EC durch die Mitte der Bögen AB und aa' (Fig. 1) senkrecht zu diesen Bögen gelegt werden. Dreht man den Krystall um einen Winkel ACB um die Gerade C, in welcher jene beiden Ebenen einander schneiden, so dass der Punkt A mit dem Punkte B zusammenfällt, so werden alle Flächen des Krystalls in ihren neuen Stellungen mit denjenigen zusammenfallen, welche vorher ihre correspondirenden Flächen besassen. In der That hat man durch Construction $AC = CB$, $aC = a'C$ und, in Folge der Gleichheit der Richtungen A und B, $Aa = Ba'$, woraus sich ergiebt, dass die sphärischen Dreiecke aAC und $a'CB$, ebenso wie die Winkel aCA und $a'CB$, gleich sind. Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel aCa' und ACB, so dass durch eine Drehung des Krystalls um einen Winkel ACB um die Gerade C, in Folge deren A mit B zusammenfällt, gleichzeitig der Punkt

---

des Beobachters die Flächen b resp. b' für denselben zur Linken liegen. Wenn dagegen in der ersten Stellung desselben b sich zur Rechten befindet, und in der zweiten Position b' zur Linken, oder umgekehrt, so sagen wir, dass die Flächen a und b in Bezug auf die Richtung A in entgegengesetztem Sinne angeordnet sind zu demjenigen, in welchem ihre correspondirenden Flächen in Bezug auf die Richtung B gestellt sind.

a in die Stellung gelangt, welche vorher der Punkt a' inne hatte. Durch dieselbe Drehung gelangt auch der Punkt b an den Ort b'. Nun folgt aus der Gleichheit der Dreiecke aAC und $a'BC$ die Gleichheit der Winkel CaA und $Ca'B$; zieht man von diesen die Winkel baA resp. $b'a'B$ ab, welche gleich gross sind, weil sie in zwei gleichen Dreiecken in gleicher Weise gelegen sind, so resultirt daraus die Gleichheit der Winkel baC und $b'a'C$. Ferner sind in den Dreiecken baC und $b'a'C$ die Seiten, zwischen denen jene Winkel liegen, ebenfalls gleich gross, woraus sich die Gleichheit der Seiten Cb' und Cb, ebenso wie diejenige der Winkel aCb und $a'Cb'$, ergiebt. Wenn daher durch die oben angegebene Drehung a mit a' zur Deckung gebracht wird, so fällt auch b [**6**] mit b' zusammen. Nun stellt aber b die Normale einer beliebigen Fläche dar, woraus folgt, dass die Drehung des Krystalls um einen Winkel ACB um die Gerade C, welche A mit B zur Deckung bringt, jede Krystallfläche mit derjenigen Stellung zusammenfallen lässt, welche die ihr correspondirende Fläche vor der Drehung besass.

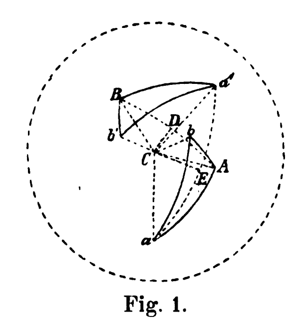


Fig. 1.

Wir wollen *Deckaxe* eine Gerade nennen, um welche man einen Krystall um einen gewissen Winkel, den wir *Deckwinkel* nennen wollen, drehen muss, um alle Flächen des Krystalls gleichzeitig in diejenigen Stellungen überzuführen, welche ihre correspondirenden Flächen vor der Drehung einnahmen.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn man die Coincidenz der Flächen durch eine Drehung des Krystalls um einen Winkel α um eine bestimmte Axe bewirkt, man dieselbe auch hervorbringen kann durch eine doppelte, dreifache etc. Rotation in dem gleichen Sinne um dieselbe Axe, d. h. im Allgemeinen durch eine Drehung um einen Winkel $n\alpha$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, ebenso aber auch durch eine Rotation um α, 2α, ... im entgegengesetzten Sinne. In der That, wenn nach der ersten Drehung die Flächen a und b die von den Flächen a' und b' verlassenen Stellungen eingenommen haben, so sind diese letzteren in die Stellungen

gelangt, welche vor der Rotation ihre correspondirenden Flächen, die wir a'' und b'' nennen wollen, einnahmen. Mit der ersten Stellung dieser Flächen a'' und b'' gelangen die Flächen a und b durch eine Drehung des Krystalls um den Winkel 2α um die betreffende Deckaxe zur Coincidenz. Da die gleiche Betrachtung für eine beliebige Anzahl von Rotationen des Krystalls um den gleichen Winkel und um die gleiche Axe wiederholt werden kann, so ist klar, dass es sich wesentlich um die Bestimmung des *kleinsten Deckwinkels* für eine bestimmte Axe handelt. Dieser Winkel ist es, welcher jedesmal unter dem Namen Deckwinkel verstanden werden soll, wenn nicht aus dem Sinne klar hervorgeht, dass es sich um ein Vielfaches desselben handelt, und die verschiedenen Arten von Deckaxen sollen im Folgenden *stets* so unterschieden werden, dass die kleinsten, ihnen entsprechenden Deckwinkel angegeben werden. In dieser Weise sind also die Ausdrücke zu verstehen: »eine Deckaxe von 60°, 90°« u. s. w., oder einfach »eine Axe von 60°, 90°« u. s. w.

Ferner ist ohne Weiteres klar, dass die Deckgleichheit zweier Richtungen in einem Krystall zugleich die Gleichheit aller Richtungen bedingt, welche in Folge einer Drehung um den Deckwinkel und um eine Deckaxe zusammenfallen.

§ 3. Bei der Untersuchung der Eigenschaften der Deckaxen bedürfen wir des folgenden Satzes:

Die Polkanten einer regelmässigen Pyramide können nur dann mögliche krystallographische Axen sein, wenn der Centralwinkel der Basis der Pyramide einen rationalen Cosinus besitzt.

[7] Seien (Fig. 3) OA, OB, OC, OD, OE beliebige benachbarte Kanten einer regelmässigen Pyramide. Die Basis derselben, $ABCDE$, ist ein regelmässiges Polygon, dessen Ebene senkrecht zu der Geraden OM steht, welche mit allen Polkanten der Pyramide gleiche Winkel einschliesst. Der Fusspunkt M dieser Senkrechten ist der Mittelpunkt des regelmässigen Polygons $ABCDE$, dessen Centralwinkel BMC wir mit α bezeichnen wollen. Wenn alle Polkanten der Pyramide mögliche krystallographische Axen sind*), muss jede durch zwei beliebige von diesen Kanten gelegte Ebene eine mögliche Krystallfläche sein, folglich auch die Ebene AOD. Da aber diese Ebene parallel der Geraden BC ist, so muss,

*) S. Anhang A am Schlusse.

wenn man durch den Punkt C parallel zu AOD eine Ebene legt, diese letztere durch die Gerade BC gehen und auf der Axe OB den Parameter OB besitzen. Es soll nun durch den Punkt C eine andere Ebene gelegt werden parallel der Ebene DOE, welche ebenfalls eine mögliche Krystallfläche ist. Um den Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene BOC zu construiren, verlängert man die Seiten BC und DE der Basis bis zu ihrem Schnittpunkte K; alsdann ist die Gerade OK der Durchschnitt der Ebenen BOC und DOE, und eine durch C parallel DOE gelegte Ebene muss die Ebene BOC in einer Geraden CH, parallel OK, schneiden. Auf diese Art ist OH, d. h. der Parameter der zu der möglichen Krystallfläche DOE parallelen Ebene auf der Axe OB, bestimmt. Da das Dreieck OBK durch eine Gerade CH parallel einer seiner Seiten geschnitten wird, so hat man für das Verhältniss der beiden Parameter

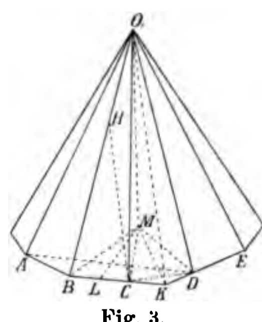


Fig. 3.

$$OB : OH = BK : CK.$$

Bezeichnet man MC mit r, so findet man aus den Dreiecken LMC und LMK:

$$\tfrac{1}{2}BC = r \sin \tfrac{1}{2}\alpha\,, \quad \tfrac{1}{2}BC + CK = r \cos \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \alpha\,,$$

daraus folgt:

$$BK = r \sin \tfrac{1}{2}\alpha \left[\frac{2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha} + 1\right] = \frac{r \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}\left[1 + 2\cos\alpha\right]$$

und

$$CK = r \sin \tfrac{1}{2}\alpha \left[\frac{2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha} - 1\right] = \frac{r \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}$$

und folglich:

$$OB : OH = 1 + 2\cos\alpha.$$

Nun können aber die Geraden OA, OB, OC, OD, OE nur dann mögliche krystallographische Axen sein, wenn das Verhältniss $OB : OH$ ein rationales ist, und dies [8] ist nur der Fall, wenn $\cos\alpha$ einen rationalen Werth besitzt. Als Ausnahmefall haben wir noch denjenigen zu betrachten, in

welchem keine fünf benachbarten Polkanten der Pyramide existiren, d. h. wenn $\alpha = 90^0$ oder $= 120^0$; da aber $\cos 90^0 = 0$ und $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$, so liegt auch in diesen Fällen keine Ausnahme von dem Satze vor.

§ 4. Es ist leicht zu beweisen, dass *der kleinste Deckwinkel keine anderen Werthe haben kann, als 60°, 90°, 120° und 180°.*

Zunächst muss dieser Winkel einen ganzen Theil von 360° bilden. Es möge α der kleinste Deckwinkel sein, welcher der Deckaxe A (Fig. 4), die wir senkrecht zur Zeichnungsebene annehmen wollen, entspricht. Sei AB eine beliebige Richtung senkrecht zu A, welche unveränderlich mit dem Krystall verbunden bleibt, wenn derselbe um die Axe A gedreht wird. Seien B^I, B^{II}, B^{III}, B^{IV}, B^V, B^{VI}, B^{VII} die aufeinanderfolgenden Stellungen, welche jene Richtung durch aufeinanderfolgende Drehungen des Krystalls, deren jede $= \alpha$, um die Axe A annimmt. Wenn α nicht einen ganzen Theil von 360° beträgt, so giebt es immer eine ganze Zahl n, für welche $(n-1)\,\alpha < 360^0$ und $n\alpha > 360^0$. Hiernach wird, wenn man den Krystall n Drehungen, jede $= \alpha$, um die Axe A, immer in demselben Sinne, unterworfen hat, die zuletzt erreichte Lage der Richtung AB zwischen die beiden ersten fallen, d. i. in der Figur B^{VII} zwischen B und B^I. Dann aber ist ohne Weiteres klar, dass man den Krystall, um wieder Deckung der Flächen zu bewirken, nur um einen Winkel $B^{VII}AB^I$ um die Axe A zu drehen braucht, und da der letztere Winkel kleiner als α ist, so widerspricht dies der gemachten Voraussetzung, dass α der kleinste Deckwinkel ist. Dieser Widerspruch verschwindet nur, wenn wir annehmen, dass α einen ganzen Theil von 360° bildet.

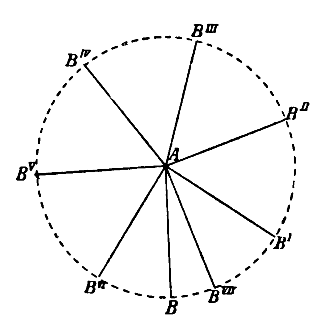


Fig. 4.

Auf der anderen Seite ist leicht einzusehen, dass $\cos \alpha$ einen rationalen Werth besitzen muss. Denn die aufeinanderfolgenden Stellungen, welche eine beliebige, gegen die Deckaxe geneigte Krystallfläche durch aufeinanderfolgende Drehungen α des Krystalls um diese Axe nach und nach annimmt, fallen

mit den Flächen einer regelmässigen Pyramide, deren Centralwinkel $= \alpha$, zusammen. Ferner sind die Kanten dieser Pyramide, als Durchschnittsrichtungen von möglichen Krystallflächen, mögliche krystallographische Axen, woraus nach § 3 folgt, dass $\cos \alpha$ nur einen rationalen Werth haben kann. In dem Anhange B wird der Beweis des Satzes gegeben werden, dass ganze Theile von 360° nur dann rationale Cosinus haben können, wenn diese Cosinus gleich einem der Werthe 0, $\pm \frac{1}{2}$, ± 1 sind, woraus man zu schliessen hat, dass der kleinste Deckwinkel keinen anderen Werth haben kann, als 60°, 90°, 120° oder 180°; noch grössere Winkel als 180° sind dadurch ausgeschlossen, dass ein derartiger Winkel nicht der kleinste Deckwinkel sein kann.

[9] **§ 5.** Indem wir zur Discussion der möglichen Anordnungen von Deckaxen, falls deren mehrere in derselben Krystallreihe vorhanden sind, übergehen, beginnen wir mit dem Nachweise, dass die Deckaxen keine anderen, als ganz bestimmte Winkel mit einander bilden können; und zwar sollen nach einander betrachtet werden die Winkel, welche Deckaxen von 60°, 90° und 180° mit einander bilden können, ferner die verschiedenen Fälle der Combination dieser Axen unter einander und mit Axen von 120°, endlich die Combinationen von Axen der letzten Art allein.

§ 6. Es soll zuerst bewiesen werden, dass *die Existenz zweier Axen von 180°, 90° oder 60°, seien es solche gleicher oder verschiedener Art, welche einen Winkel α mit einander bilden, die Existenz einer zu beiden senkrechten Deckaxe bedingt, so dass bei einer Drehung um die letztere um den Winkel 2α Deckung stattfindet.*

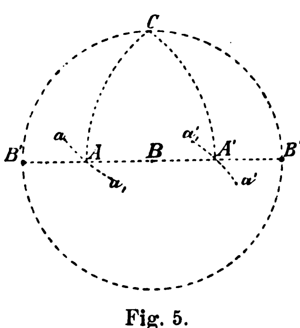


Fig. 5.

Seien A und B (Fig. 5) zwei so beschaffene Deckaxen, dass man das Zusammenfallen der Flächen durch eine Drehung von 180° um dieselben bewirken kann, und sei der Bogen $AB = \alpha$. Die Stellung einer beliebigen, durch den Endpunkt ihrer Normalen a bezeichneten Krystallfläche in Bezug auf diese Axen ist bestimmt durch die Länge des Bogens $Aa = b$ und durch den Winkel $aAB' = \beta$. Eine halbe

Umdrehung um die Axe A lässt die Fläche a mit einer anderen $a_,$ zusammenfallen, und eine gleiche Drehung um die Axe B bewirkt die Coincidenz dieser beiden Flächen mit zwei anderen a' und $a'_,$, so dass die Bögen $Aa_, = A'a' = A'a'_,$ $= b$ und die Winkel $BAa_, = BA'a'_, = B''A'a' = \beta$. Wenn C der Pol des Kreises AB ist, so hat man $CA = CA' =$ 90° und Winkel $ACA' = 2\alpha$. Dreht man den Krystall um den Winkel 2α um die Gerade C, so fällt der Punkt A mit A' zusammen, ferner a mit $a'_,$ und $a_,$ mit a'. Hieraus ist ersichtlich, dass, welche Lage a auch habe, es immer eine andere Fläche giebt, mit der sie durch eine Drehung des Krystalls um den Winkel 2α um die Gerade C zur Deckung gebracht wird. Diese Gerade ist also eine Deckaxe mit dem Winkel 2α.

Aus dem eben Gesagten ergiebt sich, dass 2α nur die Werthe 60°, 90°, 120°, 180° oder ein ganzes Vielfaches dieser Zahlen haben kann, woraus andererseits wieder folgt, dass der Winkel α, welchen zwei Deckaxen von 60°, 90° oder 180° einschliessen, nur die Werthe 30°, 45°, 60°, 90° oder deren Supplemente besitzen kann.

§ 7. Die gleichen Schlüsse, wie im vorigen Paragraphen, nur in entgegengesetzter Reihenfolge, führen zu dem Resultate, dass umgekehrt, *wenn eine Deckaxe von 180°, 90° oder 60° und senkrecht dazu eine andere Deckaxe mit dem Winkel* 2α *existirt, alsdann ausser Deckaxen derselben Art, wie die erste* [**10**], *und mit ihr Winkel* 2α *bildend, noch in der gleichen, zur zweiten Axe senkrechten, Ebene Axen von 180° existiren, welche den Winkel zwischen den Axen der ersten Art halbiren.*

§ 8. *Eine Axe von 90° kann mit einer anderen Axe von 180°, 90° oder 60° nur den Winkel 90° oder 45°* (resp. dessen Supplement) *bilden.*

Es sei B (Fig. 6) eine Axe von 90° und A eine zweite Axe von 180°, 90° oder 60°. Wenn $ABA' = 90^\circ$ und Bogen $BA = BA'$, so ist A' ebenfalls eine Deckaxe derselben Art wie A, und man hat

$$\cos AA' = \cos^2 AB.$$

Die Bögen AA' und AB können nach § 6 keine anderen Werthe annehmen, als 30°, 45°, 60°, 90° oder deren Supplemente, woraus folgt, dass die Cosinus dieser Winkel keine anderen Werthe haben können, als $\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\pm \frac{1}{2}$ und 0.

Unter diesen Werthen giebt es offenbar nur zwei Systeme, welche der vorhergehenden Gleichung genügen, nämlich:

$$\cos AA' = \tfrac{1}{2},\ \cos AB = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

und

$$\cos AA' = 0,\ \cos AB = 0,$$

so dass der Winkel AB keine anderen Werthe annehmen kann, als 45°, 135° und 90°.

§ 9. *Eine Axe von 60° ist immer senkrecht zu anderen Axen von 60°, 90° oder 180°.*

Es sei B (Fig. 6) eine Axe von 60° und A eine zweite Axe von 60°, 90° oder 180°. Wenn der Winkel $BAA' = 60°$ und der Bogen $BA' = BA$, so wird A' eine Axe derselben Art wie A sein. Alsdann ist:

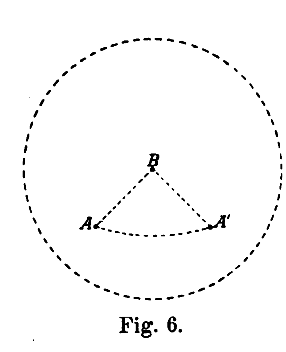


Fig. 6.

$$\cos AA' = \cos^2 AB + \tfrac{1}{2}\sin^2 AB$$
$$= \tfrac{1}{2}(\cos^2 AB + 1)$$

Folglich:

$$\cos^2 AB = 2\cos AA' - 1.$$

Nach § 6 können $\cos AB$ und $\cos AA'$ nur die folgenden Werthe annehmen:

$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm \tfrac{1}{2} \text{ oder } 0.$$

Unter diesen genügt, wie leicht zu ersehen, der angegebenen Gleichung nur ein einziges System, nämlich:

$$\cos AA' = \tfrac{1}{2},\ \cos AB = 0,$$

[11] d. h. der Winkel AB zwischen einer Axe von 60° und einer zweiten Axe von 60°, 90° oder 180° ist stets ein rechter.

§ 10. Es ist nunmehr nicht schwer, alle möglichen Arten der Combination von Deckaxen von 60°, 90° oder 180° aufzufinden.

1) *Combinationen, in denen eine Axe von 60° vorhanden ist.* Da die anderen Axen nach § 9 senkrecht zu dieser Axe von 60° sind, so müssen diejenigen von ihnen, welche der gleichen Art sind, unter einander Winkel von 60° bilden, folglich können es weder solche von 60° (§ 9), noch solche

von 90° (§ 8) sein. Es bleibt also nur eine einzige mögliche Combination übrig, diejenige *einer Axe von 60° mit Axen von 180°; die letzteren sind sämmtlich in einer zur Axe von 60° senkrechten Ebene gelegen; nach* § *7 werden deren im Ganzen sechs vorhanden sein, welche so angeordnet sind, dass jede Axe von 180° mit den benachbarten Winkel von 30° bildet* (vergl. Fig. 44) *).

2) *Die Combinationen, in denen keine Axe von 60°, aber eine Axe von 90° vorhanden ist.*

A) Wenn noch eine zweite Axe von 90° existirt, so muss sie senkrecht zur ersten stehen. Es mögen A und B (Fig. 6) zwei Axen von 90° sein; wenn der Winkel $ABA' = 90°$ und die Bögen $AB = A'B$, so ist A' eine dritte Axe von 90°. Das Dreieck ABA' giebt:

$$\cos AA' = \cos^2 BA.$$

Nach § 8 können BA und AA' keine anderen Werthe haben, als 45°, 135° und 90°, und von diesen genügt nur $BA = AA' = 90°$ der obigen Gleichung. Man sieht also, dass die Existenz zweier Axen von 90° diejenige einer dritten gleichartigen Axe bedingt, und dass alle diese Axen nothwendig auf einander senkrecht stehen. Aber nach § 7 müssen alsdann noch sechs Axen von 180° existiren, welche die Winkel der Axen von 90° halbiren. Wir können uns die gegenseitige Stellung dieser Axen, welche durch die stereographische Projection Fig. 7 dargestellt ist, vorstellen, wenn wir uns einen Würfel denken, dessen Kanten den Axen von 90° parallel sind, während die Diagonalen seiner Flächen den Axen von 180° entsprechen, oder so, dass die Axen von 90° parallel den Hauptaxen des regulären Krystallsystems sind, und die Axen von 180° den rhombischen Axen, d. h. den Normalen auf den Flächen des Rhombendodekaëders. Beachten wir, dass zwei Axen von 180°, wie A und A' (Fig. 7),

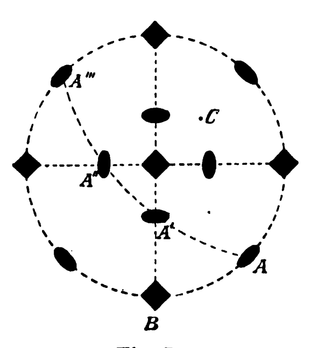


Fig. 7.

*) S. die Erklärung der Figuren (am Schlusse).

welche in demselben [12] sphärischen Dreiecke liegen, dessen Ecken die 90° von einander abstehenden Pole der Axen von 90° sind, mit einander einen Winkel von 60° bilden (denn wenn in der Gleichung auf vor. S. $AB = 45°$ gesetzt wird, so ergiebt sich $AA' = 60°$, — so folgt nach § 6, dass nothwendig eine Deckaxe von 120° existirt, welche senkrecht zu der durch A und A' gehenden Ebene ist. Diese Ebene, welche ausserdem auch durch die Axe A'' geht, ist parallel einer Oktaëderfläche des regulären Krystallsystems, deren Normale (d. i. die Axe von 120°) eine der Diagonalen des Würfels oder eine der trigonalen Axen des regulären Krystallsystems darstellt. Solcher Axen von 120° giebt es vier, parallel den vier Diagonalen des Würfels resp. den vier trigonalen Axen.

So bedingt die Existenz zweier Axen von 90° diejenige einer dritten von 90°, von sechs Axen von 180° und vier Axen von 120° in der Orientirung der Hauptaxen, der rhombischen und der trigonalen Axen des regulären Krystallsystems (vergl. Fig. 27).

B) Wenn ausser der Axe von 90° eine solche von 180°, mit ersterer 45° einschliessend (§ 8), vorhanden ist, so existirt nothwendig eine andere Axe von 90°, und dieser Fall ist mit dem vorhergehenden identisch.

Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten übrig, wo die Axe von 90° mit einer zu ihr senkrechten von 180° combinirt ist. Alsdann giebt es im Ganzen *vier Axen von 180°, welche in einer zur Axe von 90° senkrechten Ebene liegen und einander unter Winkeln von 45° und 90° schneiden* (§ 7). Fig. 32.

Es ist leicht einzusehen, dass in dem durch Fig. 27 dargestellten Falle keine neue Axe von 180° hinzugefügt werden kann, denn eine solche, sei es dass sie mit einer Axe von 90° einen Winkel von 45° oder von 90° bilde, würde mit den anderen Axen von 180° oder 90° Winkel einschliessen, deren Werthe nicht zulässig sind. Daraus folgt, dass die beiden Fälle einer zur Axe von 90° senkrechten oder zu ihr unter 45° geneigten Axe von 180° nicht combinirt werden können. Ferner ist leicht zu sehen, dass in dem durch Fig. 32 dargestellten Falle man aus demselben Grunde keine neue Axe von 180° senkrecht zu der Axe von 90° hinzufügen kann. Folglich ergiebt sich, dass die beiden Fälle Fig. 27 und Fig. 32 die einzigen möglichen Combinationen von Axen von 90° mit Axen von 180° darstellen.

3) *Combinationen, in denen weder Axen von 60°, noch Axen von 90° vorhanden sind.* Die Existenz zweier Axen von 180° bedingt diejenige einer zu ihnen senkrechten Deckaxe (§ 6). Im vorliegenden Falle ist eine solche von 60° oder 90° ausgeschlossen, daher der kleinste Winkel zwischen den hier zu betrachtenden Axen von 180° nur die Werthe 60° oder 90° haben kann.

A) Wenn dieser Winkel den letzteren Werth annimmt, so muss es ausser den beiden ersten Axen noch eine dritte von 180° geben, welche senkrecht [13] zu den beiden ersten ist (§ 6), und es sind also dann *drei zu einander senkrechte Axen von 180°* vorhanden. Fig. 38.

B) Hat der kleinste Winkel zwischen zwei Axen von 180° den Werth 60°, so giebt es in derselben Ebene im Ganzen *drei Axen von 180°, welche einander unter Winkeln von 60° schneiden, und eine zu ihnen senkrechte Axe von 120°* (§ 6). Fig. 47.

Diesem Falle kann noch eine Axe von 180° hinzugefügt werden unter einem Winkel von 60° oder 90° mit den andern Axen von 180°, und da diese Axe nicht mit allen anderen Axen von 180° Winkel von 60° bilden kann, so müssen nothwendigerweise deren zwei, zu einander senkrecht, existiren. Dann ist aber auch eine dritte, zu jenen beiden senkrecht, nothwendig vorhanden. Die anderen Axen können nicht in den Ebenen liegen, welche durch die drei aufeinander senkrechten Axen gehen, weil sie mit diesen nur die Winkel 60° oder 90° bilden können. Betrachten wir eine dieser Axen D (Fig. 8), welche in das Innere eines sphärischen Dreiecks ABC fällt, dessen Ecken den drei auf einander senkrechten Axen entsprechen, so können, da diese Axe mit den letzteren kleinere Winkel als 90° bildet, diese Winkel nur den Werth 60° besitzen. Man sieht aber leicht ein, dass eine solche Lage geometrisch unmöglich ist, weil man kein sphärisches Dreieck ABD bilden kann, in welchem die Winkel $A = B = 45°$, $D = 120°$ und die Seiten $AB = 90°$, $AD = DB = 60°$. Daraus folgt, dass man zu dem in

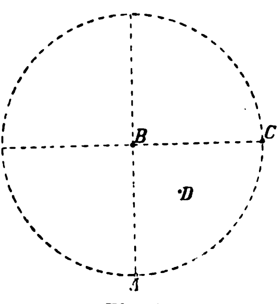


Fig. 8.

Fig. 47 dargestellten Falle keine weiteren Axen von 180° hinzufügen kann, wenigstens nicht, ohne zugleich Axen von anderer Art hinzuzufügen und zwar so, dass dieser Fall auf einen der bereits betrachteten reducirt wird.

§ 11. Ausser den fünf, einzig möglichen Combinationen von Axen von 180°, 90° und 60°, welche durch die vorhergehenden Betrachtungen gefunden wurden, kann noch je eine derartige Axe für sich allein vorhanden sein. Im letzten Paragraphen sind auch diejenigen Fälle angegeben, in denen Axen von 120° nothwendigerweise in den Combinationen von Axen anderer Art existiren müssen. Es bleibt nun noch übrig, zu prüfen, ob den verschiedenen, vorher untersuchten Fällen noch Axen von 120° hinzugefügt werden können. Dabei ist zu berücksichtigen, dass, wenn eine Axe von 120° B (Fig. 6) in Verbindung mit einer Axe A von 180°, 90° oder 60° vorhanden ist, und wenn, durch eine Drehung des Krystalls von 120° um B, A mit A' zur Deckung gelangt, die letztere Richtung eine Deckaxe derselben Art wie A sein muss. Daraus folgt, dass eine Axe von 120° in Verbindung mit einer anderen Axe von 180°, 90° oder 60° nur in dem Falle existiren kann, wo es mehrere Axen der letzteren Art giebt, welche, wie nunmehr bekannt ist, keine anderen, als eine der fünf Combinationen des § 10, bilden können. Um alle möglichen Combinationen von Axen von 120° mit anderen Axen abzuleiten, muss man ferner [14] beachten, dass man, um Wiederholungen oder unmögliche Fälle zu vermeiden, zu keiner der fünf vorhergehenden Combinationen solche Axen von 120° hinzuzufügen versuchen darf, welche die Existenz neuer Axen von 180°, 90° oder 60° bedingen würden. Damit aber eine Axe von 120° nicht die Existenz neuer Axen von 180°, 90° oder 60° in einer der fünf möglichen Combinationen der letzteren bedinge, ist nothwendig, dass sie durch die Mitte der gleichseitigen sphärischen Dreiecke hindurchgeht, deren drei Ecken in jedem Dreiecke durch gleichwerthige Axen gebildet werden. Man darf also Axen von 120° nur da zu Combinationen anderer Axen hinzufügen, wo die letzteren sämmtlich nach gleichseitigen Dreiecken mit gemeinsamem Mittelpunkte angeordnet werden können. Prüft man unter diesem Gesichtspunkte die Combinationen des § 10, so ist leicht zu sehen, dass es nur eine einzige giebt, zu welcher man eine Axe von 120° hinzufügen kann, nämlich diejenige dreier, zu einander senkrechter Axen von 180° (Fig. 38), und dass die Existenz

einer Axe von 120° in dieser Combination das Vorhandensein dreier anderer Axen von 120° bedingt, so dass wir haben: *drei Axen von 180° parallel den Hauptaxen des regulären Krystallsystems und vier Axen von 120° parallel den trigonalen Axen.* (Fig. 29).

§ 12. *Ausser den sechs, in § 10 und 11 angeführten Combinationen von Deckaxen, den vier weiteren Fällen, in denen nur je eine einzige Axe von 60° (Fig. 50), 90° (Fig. 35), 120° (Fig. 53) oder 180° (Fig. 41) existirt, und einem letzten Falle, wo überhaupt keine Deckaxe vorhanden ist, giebt es keine anderen möglichen Fälle.*

Um uns von diesem Satze zu überzeugen, ist es nur nöthig, zu beweisen, dass die gleichzeitige Existenz zweier Axen von 120° das Vorhandensein einer Deckaxe von anderer Art bedingt, denn alsdann wird eine solche Combination mit einem der bereits vorher aufgefundenen Fälle übereinstimmen.

Seien A und B (Fig. 9) diejenigen Enden zweier Axen von 120°, deren Bogenabstand nicht über 90° beträgt, und a eine beliebige Krystallfläche. Wenn die Bögen $Aa = Ab = Ac$ und die Winkel $aAb = bAc = cAa = 120°$, so sind b und c diejenigen Flächen, welche man mit a durch Drehungen des Krystalls von je 120° um die Axe A zusammenfallen lassen kann. Durch eine Drehung des Krystalls von 120° um die Axe B werde nun der Punkt A mit D und die Flächen a, b, c mit a', b', c' zur Deckung gebracht; alsdann sind nothwendigerweise alle diese Flächen correspondirende zu a. Legt man nun durch B einen grössten Kreis, welcher den Winkel $ABD = 120°$ halbirt, und durch A einen zweiten, welcher den ersten in E so schneidet, dass die Winkel $BAE = ABE = 60°$, so lässt sich beweisen, dass dann die Richtung E eine Deckaxe mit dem charakteristischen Winkel AED sein muss. In der That sieht man, [15] dass die Dreiecke AEB und BED gleich sind,

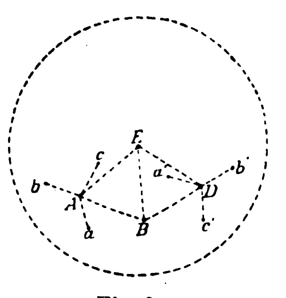


Fig. 9.

$AE = DE$ und $BDE = 60°$. Man kann also den Krystall um den Winkel AED um die Axe E so drehen, dass A mit D zusammenfällt, und es ist leicht ersichtlich, dass dieselbe Drehung eine beliebige Fläche a stets mit einer andern Fläche

des Krystalls (in unserer Construction wäre dies b') zur Deckung bringt. Wir sahen bereits, dass die Bögen Aa und Db' gleich gross sind; es bleibt also nur übrig zu beweisen, dass die Winkel EAa und EDb' es ebenfalls sind. Es sei der Winkel $BAa = \alpha$, daher auch $BDa' = \alpha$; ferner hat man: $EAa = 60^\circ + \alpha$ und $EDb' = BDa' + a'Db' - BDE = \alpha + 120^\circ - 60^\circ = \alpha + 60^\circ$, d. h. die behauptete Gleichheit findet statt. Ebenso ist nicht schwer zu beweisen, dass der der Axe E zugehörige Deckwinkel AED von 120° verschieden ist. In der That liefert uns das Dreieck AEB die Gleichung:

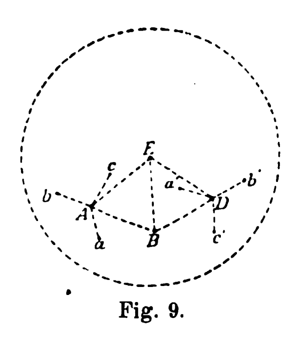


Fig. 9.

$$\cos AEB = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos AB.$$

Folglich:

$$\cos AB = \frac{4\cos AEB + 1}{3}.$$

Daraus ergeben sich bestimmte Grenzen für den Werth des Winkels AEB. Erstens kann derselbe 180° nicht überschreiten, weil alsdann die gegenüberliegende Seite AB ebenfalls grösser als 180° sein müsste, während sie nach der eingangs gemachten Annahme nicht über 90° beträgt. In Folge dessen ist, da $\cos AB$ nicht negativ sein kann, der kleinste Werth von $\cos AEB = -\tfrac{1}{4}$, d. h. $AEB < 120^\circ$. Andererseits ergiebt sich daraus, dass die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks immer über 180° ist, $AEB > 60^\circ$. Da nun der Winkel AEB die Hälfte des Winkel AED ist, so hat man

$$240^\circ > AED > 120^\circ.$$

Als Deckwinkel kann aber AED keine anderen Werthe haben, als 60°, 90°, 120°, 180° oder ganze Vielfache dieser Winkel. Man sieht also, dass von allen diesen Werthen nur ein einziger, nämlich 180°, innerhalb der angegebenen Grenzen liegt, und daraus folgt, dass der Deckaxe E niemals ein Winkel von 120° entsprechen kann, so dass die gleichzeitige Existenz zweier Axen von 120° immer das Vorhandensein einer Deckaxe, deren Winkel einen andern Werth als 120° hat, bedingt.

Kapitel III.

Ueber die Gesetze der Symmetrie.

§ 13. Die im Vorhergehenden für die Richtungen, welche Deckgleichheit besitzen, durchgeführte Untersuchung der verschiedenen möglichen Arten ihrer [**16**] Anordnung ist nunmehr auch für diejenigen Richtungen vorzunehmen, welche symmetrische Gleichheit (s. die Definition in § 1) darbieten.

Es seien A und B (Fig. 2) zwei symmetrisch gleiche Richtungen, und a' und b' zwei den Flächen a und b correspondirende Krystallflächen. Wenn die Geraden B, a' und b' jenseits des Kugelcentrums verlängert werden, so dass man die Richtung B_1 und die Perpendikel a'_1 und b'_1, welche der Richtung B resp. den Perpendikeln a' und b' diametral entgegengesetzt sind, erhält, so bilden die drei Schnittpunkte dieser neuen Richtungen mit der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreieck $B_1 a'_1 b'_1$, welches Deckgleichheit mit dem Dreieck Aab darbietet. Die Flächen, welche den Perpendikeln a'_1 und b'_1 entsprechen, existiren nicht nothwendig am Krystall, aber sie sind vorhandenen Flächen parallel, und wenn sie existirten, würde die Richtung B_1 Deckgleichheit mit der Richtung A zeigen, so dass man das Zusammenfallen aller Flächen bewirken könnte durch Drehung des Krystalls um einen bestimmten Winkel und um eine bestimmte Axe C. Für die vorhandenen Flächen findet dieses Zusammenfallen in Wirklichkeit nicht statt, sondern die beschriebene Drehung bewirkt nur, dass jede Fläche ihrer correspondirenden parallel wird. In der im Anhang A (am Schlusse) beschriebenen Construction, welche dazu dient, das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse zu controliren, wird kein Unterschied zwischen einer Fläche und der ihr parallelen gemacht, da in dieser Construction beide in derselben Ebene zusammenfallen. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn eine bestimmte Fläche krystallographisch möglich ist, es auch die ihr parallele Fläche sein wird. Wenn also auch die Flächen a'_1 und b'_1 an dem Krystall nicht existiren,

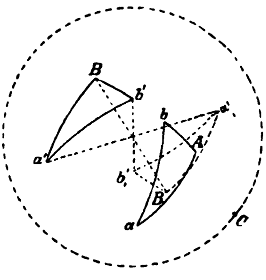


Fig. 2.

so müssen sie doch auf alle Fälle möglich sein, denn sonst wären auch ihre parallelen, die Flächen a' und b', ebenso wenig möglich. So hängt die Möglichkeit der Flächen a' und b' ab von der Möglichkeit der Deckaxe C mit dem Winkel α, d. h. einer so beschaffenen Axe, dass, wenn man dem Krystall eine Drehung von angegebenem Betrage um dieselbe verleiht, die Richtung A mit der B entgegengesetzten zusammenfällt, und gleichzeitig die Flächen a und b mit denjenigen zur Deckung gelangen, welche ihren symmetrisch correspondirenden Flächen a' und b' parallel sind. Auf Grund dieser Betrachtungen ist es leicht, alle möglichen Arten der Anordnung symmetrisch gleicher Richtungen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke müssten zuerst die verschiedenen Symmetriearten bestimmt werden, indem man dem Winkel α nach und nach alle möglichen Werthe, nämlich 0°, 60°, 90°, 120° und 180°, zutheilt. Es ist klar, dass diese verschiedenen Fälle sich mit einander in derselben Weise combiniren können, wie die entsprechenden Deckaxen; aber anstatt die Untersuchung in dieser Weise durchzuführen, wollen wir einen anderen Weg einschlagen, welcher uns rascher zu unserem Ziele, alle [17] möglichen Arten der Anordnung gleicher Richtungen, sowohl der deckbar, als der symmetrisch gleichen, aufzufinden, führen wird. Betrachten wir zunächst jede Symmetrieart für sich.

1) $\alpha = 0$; dies will sagen, dass A mit B zusammenfällt, und dass folglich ohne irgend eine Drehung a parallel a' und b parallel b' ist. Jede Richtung im Krystall ist der diametral entgegengesetzten symmetrisch gleich. Diese Art der Symmetrie kann definirt werden durch das Gesetz, dass jeder Fläche des Krystalls eine andere desselben correspondirt, welche ihr parallel ist; wir wollen dieses Gesetz *das Gesetz des Parallelismus* nennen.

2) $\alpha = 180°$. (Zur Erläuterung dienen hier die beiden Figg. 10 und 11, deren erste eine Projection auf eine durch die imaginäre Deckaxe gehende Ebene, die andere eine Projection auf eine zu jener Axe senkrechte Ebene darstellt.) Es sei a eine wirklich vorhandene, über der Projectionsebene gelegene Fläche*); durch eine Drehung des Krystalls von 180° um die imaginäre Deckaxe C fällt diese Fläche mit der imaginären Fläche a' (in Fig. 10 unter, in Fig. 11 über der

---

*) S. die Erklärung der Figuren am Schlusse.

Zeichnungsebene) zusammen, und es giebt eine wirklich vorhandene Fläche $a_{,}$ (in Fig. 10 über, in Fig. 11 unter der Zeichnungsebene), welche mit $a'_{,}$ parallel ist. In derselben Weise muss einer anderen Fläche b des Krystalls eine reelle Fläche b' entsprechen. Man sieht also, dass irgend je zwei correspondirende Flächen symmetrisch gestellt sind in Bezug

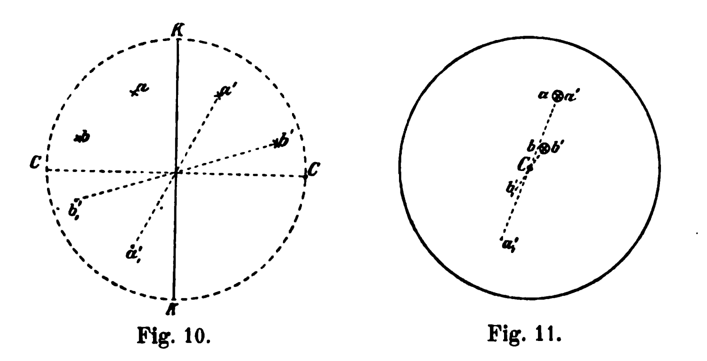


Fig. 10. Fig. 11.

auf eine zur imaginären Deckaxe senkrechte Ebene (KK in Fig. 10 und die Projectionsebene in Fig. 11). Dieses Symmetriegesetz kann in folgender Weise definirt werden: Jeder Fläche des Krystalls entspricht eine andere, so dass diese beiden Flächen eine bestimmte Ebene, Symmetrieebene genannt, welche für alle Flächen die gleiche ist, in derselben Geraden (oder in parallelen Geraden) schneiden, und dass der Winkel zwischen den nach dem Innern des Krystalls gerichteten Normalen dieser beiden Flächen durch die Symmetrieebene halbirt wird. Wir werden diesen Fall der Symmetrie dadurch bezeichnen, dass wir die *Symmetrieebene* angeben, in Bezug auf welche er statthat.

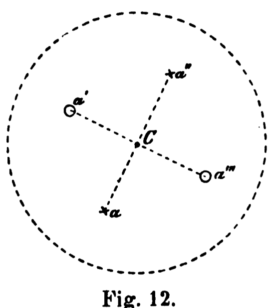


Fig. 12.

3) $\alpha = 90^{\circ}$. Durch eine Drehung des Krystalls von 90° um die imaginäre Deckaxe C (Fig. 12) fällt irgend eine Fläche a zusammen mit der imaginären Fläche a' über der Zeichnungsebene, und es wird eine reelle Fläche a''' geben, welche parallel zu a' und unter der Zeichnungsebene gelegen ist.

Durch eine neue Drehung von 90° gelangt die Fläche a''' zur Deckung mit der unteren Fläche a, welche imaginär sein wird, während eine obere, zu ihr parallele Fläche a'' wirklich vorhanden ist. Dreht man nun nochmals um 90°, so führt man a'' in die Stellung der imaginären oberen Fläche a''', und dadurch ist die Existenz einer reellen unteren Fläche a', parallel zu a''', bedingt. Man sieht [18] also, dass bei diesem Symmetriegesetze jeder Fläche a (oben) drei andere entsprechen: a'' (oben), a' und a''' (unten). Man kann sich diese Flächen in zwei Paare (a, a'' und a', a''') getheilt denken, so dass die Flächen jedes Paares mit einander zur Deckung gelangen durch eine Drehung des Krystalls von 180° um dieselbe Axe C, und dass die Flächen des einen Paares mit den Parallelen der Flächen des anderen Paares eine regelmässige quadratische Pyramide bilden, deren Axe C jene Deckaxe von 180° ist.

Wir wollen dieses Symmetriegesetz mit dem Namen *sphenoidische Symmetrie* bezeichnen, und die Deckaxe von 180°, welche unveränderlich damit verbunden ist, wollen wir *die Axe der sphenoidischen Symmetrie* nennen. In dieser Symmetrie giebt es Richtungen, welche Deckgleichheit besitzen, d. h. diejenigen, welche durch eine Drehung des Krystalls von 180° um die Symmetrieaxe zur Coincidenz gelangen, während sie gleichzeitig symmetrische Gleichheit darbieten mit zwei anderen Richtungen, welche denjenigen diametral entgegengesetzt sind, mit denen die ersteren durch eine Drehung des Krystalls um 90° um dieselbe Axe zusammenfallen.

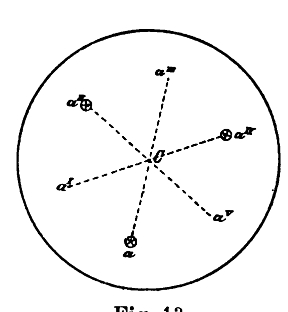


Fig. 13.

4) $\alpha = 60°$. Durch eine Drehung von 60° um die imaginäre Deckaxe C (Fig. 13) nimmt die reelle obere Fläche a die Stellung der imaginären oberen Fläche a^{I} ein, woraus die Existenz einer reellen unteren Fläche a^{IV}, parallel zu a^{I}, sich ergiebt. Da durch eine wiederholte Drehung um 60° die untere Fläche a^{IV} mit der unteren Fläche a^{V} zusammenfällt, so wird der letzteren parallel eine reelle obere Fläche a^{II} vorhanden sein. Durch eine dritte Drehung von 60° gelangt diese obere Fläche a^{II} in die Stellung der oberen a^{III}, so dass dadurch die Existenz ihrer

Parallelen, der unteren Fläche a, bedingt wird, welche ihrerseits durch eine vierte Drehung mit der unteren Fläche a^{I} zusammenfällt, deren Parallele a^{IV} oben somit eine reelle Fläche sein wird; endlich wird die letztere durch eine fünfte Drehung mit a^{V} oben coincidiren, und dadurch die Existenz der parallelen unteren Fläche a^{II} bestimmt sein. Man sieht also, dass einer beliebigen Fläche a fünf andere correspondiren, welche mit ihr eine Doppelpyramide bilden, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist. Dieses Symmetriegesetz ist identisch mit dem durch das gleichzeitige Vorhandensein einer Deckaxe von 120° und einer dazu senkrechten Symmetrieebene bestimmten Gesetze. Jede Richtung steht im Verhältniss der Deckgleichheit zu zwei anderen, mit denen sie durch eine Drittelumdrehung um die Axe von 120° zusammenfällt, und gleichzeitig sind diese drei Richtungen symmetrisch gleich drei anderen, welche zu ihnen spiegelbildlich liegen in Bezug auf eine zur Deckaxe senkrechte Symmetrieebene.

5) $\alpha = 120°$. Durch eine Drehung des Krystalls um 120° um die imaginäre [**19**] Deckaxe (Fig. 14) nimmt irgend eine reelle Fläche a (oben) die Stellung von a^{II} an, so dass eine Fläche a^{V} (unten) existiren muss, welche durch eine zweite Drehung mit a^{I} zusammenfällt, woraus sich das Vorhandensein der Fläche a^{IV} oben ergiebt, welche ihrerseits in derselben Weise nach und nach die Existenz der Flächen a^{III} unten, a^{II} oben und a^{I} unten bedingt. Die Gesammtheit dieser, nothwendig coexistirenden, Flächen bildet ein Rhomboëder. Dieses Gesetz der Symmetrie kann ersetzt werden durch die gleichzeitige Existenz einer Deckaxe von 120° mit dem Gesetze des Parallelismus. Jede Richtung besitzt Deckgleichheit mit zwei anderen Richtungen, mit denen sie durch Drehungen von 120° um die Deckaxe zusammenfällt, während mit ihnen symmetrisch gleich sind drei andere, jenen diametral entgegengesetzte, Richtungen.

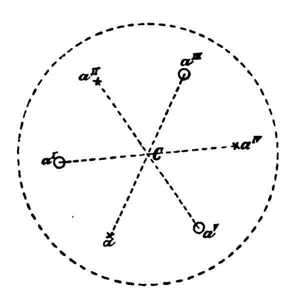


Fig. 14.

§ 14. Um alle möglichen Combinationen der verschiedenen Symmetriegesetze mit den Deckaxen aufzufinden, werden wir in folgender Weise verfahren: Zuerst soll das Gesetz des Parallelismus combinirt werden mit den elf, in den §§ 10, 11

und 12 behandelten Fällen. Nachdem auf diese Art elf neue Fälle erhalten worden sind, werden wir alle 22 Fälle auf alle möglichen Arten mit Symmetrieebenen combiniren, und endlich soll das Gesetz der sphenoidischen Symmetrie zu allen denjenigen vorhergehenden Fällen hinzugefügt werden, mit denen es vereinbar ist. Bei diesen Combinationen ist die Hinzunahme der beiden unter 4) und 5) im vorigen Paragraphen beschriebenen Symmetriegesetze nicht erforderlich, denn da diese selbst Combinationen des Gesetzes des Parallelismus oder einer Symmetrieebene mit Deckaxen darstellen, so müssen sie sich von selbst in der Zahl derjenigen Combinationen befinden, welche auf dem angegebenen Wege gefunden werden.

§ 15. Bevor wir zur Analyse der möglichen Combinationen der Symmetriegesetze mit den Deckaxen übergehen, haben wir die folgenden Bemerkungen zu machen:

1) *Eine Deckaxe von 180°, 90° oder 60°, mit dem Gesetze des Parallelismus combinirt, bedingt die Existenz einer zu ihr senkrechten Symmetrieebene.*

Beweis: Das Vorhandensein einer Fläche a (der oberen in Fig. 15) und die gleichzeitige Anwesenheit einer Deckaxe C von 180°, 90° oder 60° bedingt die Existenz einer anderen Fläche a' (oben), mit welcher sie durch eine Drehung des Krystalls von 180° um die Deckaxe zusammenfällt. Das Gesetz des Parallelismus bedingt weiter die Existenz zweier anderer, den ersten paralleler Flächen, a und a' unten. Offenbar sind alsdann sowohl die beiden a, als die beiden a' zu einander [20] symmetrisch gestellt in Bezug auf die zur Deckaxe senkrechte Projectionsebene.

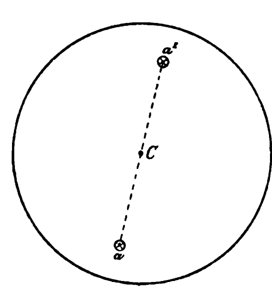


Fig. 15.

2) *Die Existenz einer Symmetrieebene in Verbindung mit einer zu ihr senkrechten Deckaxe von 180°, 90° oder 60° bedingt zugleich das Gesetz des Parallelismus.* In der That erfordert das Vorhandensein einer oberen Fläche a (Fig. 15) dasjenige einer unteren Fläche a, welche zu jener in Bezug auf die zur Projectionsebene gewählte Symmetrieebene spiegelbildlich liegt. Andererseits bedingt die Existenz einer Deckaxe von 180°,

90° oder 60° diejenige zweier Flächen a' (oben und unten), welche den beiden Flächen a parallel sind.

3) *Das Vorhandensein zweier Symmetrieebenen, welche mit einander einen Winkel α bilden, erfordert die Existenz einer, der Schnittrichtung parallelen, Deckaxe mit dem Winkel 2α.*

Seien BAB' und CAC' (Fig. 16) zwei Symmetrieebenen und der Winkel $BAC = \alpha$. Die Existenz einer Fläche a bedingt diejenige einer Fläche a', welche zu ihr symmetrisch in Bezug auf die Ebene BAB' so gestellt ist, dass a und a' sich auf demselben Kleinkreise mit dem Centrum A befinden. Die zu ihnen in Bezug auf die Ebene CAC' symmetrischen beiden Flächen a'' und a''' befinden sich auf demselben Kleinkreise, und, wie leicht einzusehen, bringt eine Drehung des Krystalls um den Winkel 2α um die Axe A einerseits die Fläche a mit a'', andererseits a' mit a''' zur Deckung. Folglich ist die Gerade A eine Deckaxe mit dem Winkel 2α.

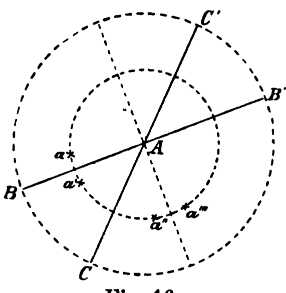


Fig. 16.

4) Durch analoge Betrachtungen kann man sich leicht davon überzeugen, dass umgekehrt *die Existenz einer Deckaxe von 2α und einer, dieser Axe parallelen, Symmetrieebene das Vorhandensein einer anderen Symmetrieebene, welche durch dieselbe Axe geht und mit der ersteren einen Winkel α einschliesst, erfordert.*

§ 16. Nach § 15, 1) erhalten wir, wenn wir das Gesetz des Parallelismus mit den verschiedenen Arten der Anordnung von Deckaxen, wie sie in den §§ 10, 11 und 12 enthalten sind, combiniren, zu jeder der Deckaxen von 180°, 90° und 60° eine dazu senkrechte Symmetrieebene.

1) Der in Fig. 27 dargestellte Fall giebt *neun Symmetrieebenen; drei derselben gehen je durch zwei der Axen von 90°, die anderen sechs je durch zwei der Axen von 120°.* Fig. 28 *).

---

*) Die ausgezogenen schwarzen Linien in den Figuren bezeichnen die Durchschnitte der Symmetrieebenen mit der Kugeloberfläche.

[21] 2) Der Fall Fig. 29 liefert *drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen, welche durch die Axen von 180° gehen und von den Axen von 120° gleichen Abstand haben.* Fig. 30.

3) Der Fall Fig. 32 giebt *fünf Symmetrieebenen, von denen vier durch die Axe von 90° und durch eine der Axen von 180°, die fünfte durch alle Axen von 180°, gehen.* Fig. 33.

4) Der in Fig. 35 dargestellte Fall, in welchem nur *eine Axe von 90°* vorhanden ist, liefert *eine Ebene der Symmetrie senkrecht zu jener.* Fig. 36.

5) Der Fall Fig. 38 giebt *drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen, welche einander in den Axen von 180° schneiden.* Fig. 39.

6) Aus Fig. 41, wo nur *eine Axe von 180°* vorhanden ist, leitet sich Fig. 42 mit *einer dazu senkrechten Symmetrieebene* ab.

7) Der Fall Fig. 44 führt zu *sieben Ebenen der Symmetrie, von denen sechs, einander unter Winkeln von 30° schneidend, durch die Axe von 60° und durch eine der Axen von 180° gehen, während die siebente, zu jenen senkrecht, durch alle Axen von 180° geht.* Fig. 45.

8) In dem Falle Fig. 50 existirt nur *eine Axe von 60°*, es resultirt daher *eine Symmetrieebene senkrecht zu dieser Axe.* Fig. 51.

9) Der Fall Fig. 47 giebt *drei Ebenen der Symmetrie, welche einander unter Winkeln von 60° schneiden und mitten zwischen je zwei Axen von 180° gelegen sind.* Fig. 48.

10) In Fig. 53 existirt nur eine Axe von 120°, so dass keine Symmetrieebene resultirt. Es liegt hier der Fall des fünften Symmetriegesetzes von § 13 vor, welchen wir definirt haben als denjenigen des gleichzeitigen Vorhandenseins einer Axe von 120° mit dem Gesetze des Parallelismus. Fig. 56.

11) Der in Fig. 58 dargestellte Fall, wo es überhaupt keine Deckaxe giebt, liefert einen weiteren, welcher *allein* durch *das Gesetz des Parallelismus* charakterisirt ist. Fig. 57.

§ 17. Wir sahen in § 13, dass die Möglichkeit einer Symmetrieebene von derjenigen einer zu ihr senkrechten Deckaxe von 180° abhängt. Daraus folgt, dass in den 22, in den §§ 10, 11, 12 und 16 aufgezählten Fällen nur solche Symmetrieebenen zugefügt werden dürfen, welche zu möglichen Axen von 180° senkrecht stehen. Fügt man im fraglichen Falle zu einer schon vorhandenen Axe von 180° eine dazu

senkrechte Symmetrieebene hinzu, so wird dies keinen anderen Effect haben, als wenn man das Gesetz des Parallelismus hinzugefügt hätte (§ 15, 2), so dass eine derartige Combination nur zu Wiederholungen führen würde. Ebenso wenig hat man Symmetrieebenen hinzuzufügen den elf im vorigen Paragraphen behandelten Fällen, in denen schon das Gesetz des Parallelismus existirt, weil [22] man alsdann zugleich eine Axe von 180° hinzufügen und somit eine andere Combination von Deckaxen erhalten würde, während diese Combinationen doch schon alle untersucht worden sind. Es bleibt also nur übrig, denjenigen der elf Fälle von § 10, 11 und 12, welche durch die Combination mit neuen Axen von 180° sich in andere derselben Anzahl von Fällen umwandeln können, Symmetrieebenen hinzuzufügen, und diese müssten senkrecht zu jenen Axen, welche man zu den bereits vorhandenen hinzufügen könnte, angenommen werden. Prüft man unter diesem Gesichtspunkte die elf Fälle der §§ 10, 11 und 12, so ergiebt sich Folgendes:

1) Der Fall Fig. 29 geht in den durch Fig. 27 dargestellten über, wenn man Axen von 180° parallel den rhombischen Axen hinzufügt. Die Hinzufügung einer Symmetrieebene senkrecht zu einer dieser Axen bedingt aber, in Folge des Vorhandenseins der Axen von 120°, im Ganzen *sechs Ebenen der Symmetrie senkrecht zu den rhombischen Axen.* Fig. 31.

2) Der Fall Fig. 35, in welchem nur eine einzige Axe von 90° existirt, geht in den Fall Fig. 32 über durch Hinzufügung von vier Axen von 180°; die Annahme einer Symmetrieebene senkrecht zu einer dieser imaginären Axen führt, in Folge des Vorhandenseins der Axe von 90° (§ 15, 4), im Ganzen zu *vier Symmetrieebenen, welche durch die Axe von 90° gehen und einander unter Winkeln von 45° und 90° schneiden.* Fig. 37.

3) Der Fall Fig. 38 geht in den Fig. 32 über durch Hinzufügung einer Axe von 180°, welche den Winkel zwischen zwei Axen von 180° halbirt. Nimmt man aber eine Symmetrieebene senkrecht zu dieser imaginären Axe an, so erhält man (§ 15, 4) im Ganzen *zwei Ebenen der Symmetrie, welche durch eine der Axen von 180° gehen und die Winkel der beiden anderen halbiren.* Fig. 40.

Zu demselben Falle Fig. 38 könnte man noch andere Axen von 180° hinzufügen und folglich neue Ebenen der Symmetrie damit verbinden, aber in Bezug auf diese wären dann die

reellen Deckaxen von Fig. 38 nicht symmetrisch angeordnet, und daraus folgt, dass das Vorhandensein solcher Symmetrieebenen die reelle Existenz neuer Deckaxen erfordern würde; hierdurch ist aber bewiesen, dass die Fälle, welche man auf diese Art ableiten könnte, auch erhalten werden durch Hinzufügung von Symmetrieebenen, welche keine neuen Deckaxen bedingen, zu irgend einer anderen Combination von Deckaxen.

4) Aus dem Falle Fig. 41 wird der in Fig. 38 dargestellte, wenn man mit der einzig vorhandenen Axe von 180° noch eine zweite, dazu senkrechte, derselben Art verbindet. Fügt man jedoch zu dieser imaginären Axe von 180° eine zu ihr senkrechte Symmetrieebene hinzu, so ergeben sich nach § 15, 4 im Ganzen *zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen, welche durch die Axe von 180° gehen.* Fig. 43.

[**23**] Würde man noch eine, durch dieselbe Axe gehende Ebene der Symmetrie hinzufügen, so würde die Axe von 180° sich in eine von 90° oder 60° umwandeln, d. h. man hätte einen Fall, welcher mit einem auf anderem Wege erhaltenen identisch wäre. Auf Grund der, unter der vorhergehenden Nummer gemachten Bemerkung ist es ebenso wenig statthaft, Ebenen der Symmetrie hinzuzufügen, welche nicht durch die Axe von 180° hindurchgehen.

5) Was den Fall Fig. 58 betrifft, in welchem überhaupt keine Deckaxe vorliegt, so kann man irgend *eine Symmetrieebene* annehmen und hat dann den Fall Fig. 46.

Die Hinzufügung noch einer weiteren Symmetrieebene ist nicht statthaft, weil es alsdann nothwendig auch eine Deckaxe geben würde (§ 15, 3).

6) Der Fall Fig. 47 geht in denjenigen Fig. 44 über durch Hinzunahme einer Axe von 180°, welche den Winkel zwischen zweien der vorhandenen Axen von 180° halbirt. Daraus folgt, dass man zu diesem Falle eine Ebene der Symmetrie zufügen kann, welche durch die Axe von 120° und eine der Axen von 180° hindurchgeht. In Folge des Vorhandenseins der ersteren giebt es alsdann *drei Symmetrieebenen, welche einander in der Axe von 120° unter Winkeln von 60° schneiden und deren jede durch eine der Axen von 180° geht*, und in Folge der Bemerkung § 15, 4 giebt es noch *eine vierte, zu der ersteren senkrechte Symmetrieebene, welche durch alle Axen von 180° geht.* Fig. 49.

Offenbar ist es hier, ebenso wie in den anderen Fällen, unstatthaft, Symmetrieebenen hinzuzufügen, in Bezug auf

welche die Deckaxen nicht symmetrisch angeordnet sind. Man könnte somit in Fig. 47 nur noch eine Symmetrieebene senkrecht zu der Axe von 120° annehmen, aber dieser neue Fall wäre, in Folge der Bemerkung § 15, 4, identisch mit dem soeben abgeleiteten Falle Fig. 49.

7) Der Fall Fig. 50, mit einer einzigen Axe von 60°, führt zu dem in Fig. 44 dargestellten durch Hinzufügung einer Axe von 180°. Man kann also hier eine durch die Axe von 60° hindurchgehende Symmetrieebene annehmen und hat alsdann, nach § 15, 4, im Ganzen *sechs Symmetrieebenen, welche einander in der Axe von 60° unter Winkeln von 30° und 60° schneiden.* Fig. 52.

8) Fig. 53, in welcher nur eine Axe von 120° vorhanden ist, geht in Fig. 50, mit einer Axe von 60°, über, wenn man noch eine, mit der Axe von 120° zusammenfallende Axe von 180° annimmt. In Folge dessen ist man berechtigt, zu diesem Falle *eine zur Axe von 120° senkrechte Symmetrieebene* hinzuzufügen, und alsdann erhält man das Symmetriegesetz von § 14, 4. Fig. 54.

9) Derselbe Fall Fig. 53, mit einer einzigen Axe von 120°, führt zu Fig. 47 durch Hinzufügung einer Axe von 180° senkrecht zu der von 120°. Man kann also mit demselben noch eine Symmetrieebene verbinden, welche durch die Axe von 120° geht, [**24**] und erhält dann im Ganzen *drei Ebenen der Symmetrie, welche einander in der Axe von 120° unter Winkeln von 60° schneiden.* Fig. 55.

Die Hinzufügung anderer Symmetrieebenen bedingt die Existenz neuer Deckaxen.

Fügt man zu Fig. 32 eine Axe von 180° hinzu, welche den Winkel zwischen der Axe von 90° und einer der Axen von 180° halbirt, so geht dadurch dieser Fall in denjenigen der Fig. 27 über. Die Annahme einer Symmetrieebene senkrecht zu jener neuen Axe bedingt die Existenz einer weiteren Axe von 90°, und daraus geht hervor, dass wir das gleiche Resultat schon weiter oben auf anderem Wege erhalten mussten.

Zu den beiden noch übrigbleibenden Fällen der §§ 10, 11 und 12, nämlich den in Fig. 27 und 44 dargestellten, können neue Axen von 180° nicht hinzugefügt werden, also kann man, ohne das Gesetz des Parallelismus hereinzuziehen, auch keine neuen Symmetrieebenen hinzufügen.

§ 18. Es bleibt noch übrig, mit den vorhergehenden Fällen das Gesetz der sphenoidischen Symmetrie, § 13, 3,

zu combiniren. Hierbei ist zu beachten, dass dieses Gesetz nur da eintreten kann, wo eine Axe von 180°, welche sich in eine solche von 90° umwandeln kann, existirt. Derartige Axen von 180° giebt es nur in den Deckaxen-Combinationen Fig. 29, 38 und 41, sowie in denjenigen Fällen, welche sich von diesen durch Hinzufügung des Gesetzes des Parallelismus ableiten, nämlich Fig. 30, 39 und 42, oder durch Hinzufügung von Symmetrieebenen, Fig. 31, 40 und 43. Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Hinzufügung des Gesetzes der sphenoidischen Symmetrie zu dem Falle Fig. 38 den schon vorher gefundenen Fig. 40 liefert, denn dieses Gesetz erfordert das gleichzeitige Vorhandensein von vier Flächen, welche so angeordnet sind, wie a, a', a'' und a''' in Bezug auf die Symmetrieaxe C in Fig. 17. Die Existenz einer Axe von 180°, DD, senkrecht zur Axe C, zieht das Auftreten von vier neuen Flächen b, b', b'' und b''' nach sich. Diese acht Flächen sind offenbar symmetrisch gestellt in Bezug auf die beiden Ebenen FF und GG, welche durch C gehen und die Winkel zwischen den beiden anderen Axen von 180° halbiren, wodurch der Beweis geliefert ist, dass dieser Fall mit dem in Fig. 40 dargestellten übereinstimmt.

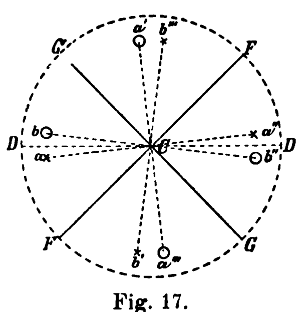


Fig. 17.

Da in Fig. 29 ebenfalls drei auf einander senkrechte Axen von 180° vorhanden sind, so liefert die Hinzufügung des Gesetzes der sphenoïdischen Symmetrie zu diesem Falle Ebenen der Symmetrie, welche durch die Axen von 120° gehen, und zwar bedingen die letzteren die Erhöhung der Anzahl dieser Ebenen auf sechs, so dass wir einen schon abgeleiteten Fall, Fig. 31, erhalten. Hier sind alle Axen von 180° in solche der sphenoidischen Symmetrie umgewandelt, und in Folge dessen ist eine weitere Hinzufügung dieser Symmetrie unmöglich. Dagegen kann man in dem durch Fig. 40 dargestellten Falle die sphenoidische Symmetrie noch in Bezug auf eine [25] andere Axe von 180° annehmen, es ist aber leicht einzusehen, dass man durch diese Hinzufügung den oben betrachteten Fall, nämlich Fig. 31, erhält.

Der einzige neue Fall, zu dem wir gelangen können,

resultirt aus der Hinzufügung der sphenoidischen Symmetrie zu dem in Fig. 41 dargestellten Falle, in welchem nur eine Axe von 180° existirt, und dieser Fall zeigt *das Gesetz der sphenoidischen Symmetrie allein, ohne irgend eine Hinzufügung.* Fig. 34.

In denjenigen Fällen, welche aus der Combination der betrachteten Fälle Fig. 29, 38 und 41 mit dem Gesetze des Parallelismus hervorgehen, ist es nicht statthaft, noch das Gesetz der sphenoidischen Symmetrie hinzuzufügen, weil dieses Gesetz in Combination mit demjenigen des Parallelismus eine Deckaxe von 90° ergiebt. Auch ist es leicht einzusehen, dass man durch Hinzunahme des Gesetzes der sphenoidischen Symmetrie zu dem in Fig. 43 dargestellten Falle zu dem bereits bekannten der Fig. 40 gelangt.

Kapitel IV.

Allgemeine Uebersicht der verschiedenen krystallographischen Gruppen.

§ 19. In den Kapiteln II und III wurden 32 krystallographische Gruppen aufgestellt, welche sich von einander durch die Zahl und Anordnung der gleichwerthigen Richtungen unterscheiden. In der nun folgenden allgemeinen Uebersicht derselben sollen sie in sechs Klassen vereinigt werden, indem in die gleiche Klasse diejenigen Gruppen gestellt werden, welche gewisse gemeinsame Eigenschaften besitzen. Diese Klassen sind nichts Anderes, als die allgemein adoptirten Krystallsysteme. So bilden die fünf Gruppen Fig. 27, 28, 29, 30 und 31, welche durch das Vorhandensein mehrerer Axen von 120° charakterisirt sind, das erste oder *das reguläre Krystallsystem.* Die sieben Gruppen Fig. 32, 33, 34, 35, 36, 37 und 40, welche eine einzige Axe von 90° oder als Ersatz derselben sphenoidische Symmetrie besitzen, bilden das zweite oder *das tetragonale Krystallsystem.* Zwölf Gruppen, Fig. 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55 und 56, charakterisirt durch die Gegenwart einer einzigen Axe von 120° oder 60°, setzen das dritte oder *das hexagonale Krystallsystem* zusammen. Drei Gruppen, Fig. 38, 39 und 43, in denen nur Axen von 180° vorhanden sind, und zwar deren drei auf einander senkrechte oder zu ihnen normale Symmetrieebenen an ihrer Stelle oder mit ihnen

combinirt, bilden das vierte oder *rhombische Krystallsystem.* Drei Gruppen, Fig. 41, 42 und 46, charakterisirt durch eine einzige Axe von 180° und eine dazu senkrechte Symmetrieebene, [**26**] welche mit dieser Axe verbunden ist oder sie ersetzt, bilden das fünfte oder *monokline System.* Endlich entsprechen die beiden Gruppen ohne Deckaxe und Symmetrieebene, Fig. 57 und 58, dem sechsten oder *triklinen Krystallsystem.*

§ 20. Im Folgenden soll nunmehr die Beziehung der im Vorhergehenden aufgestellten Gruppen der Krystalle zu den verschiedenen, allgemein angenommenen Unterabtheilungen der Krystallsysteme angegeben werden. Für diese Unterabtheilungen werden wir uns der von Naumann angewendeten Namen bedienen. Wir lenken die Aufmerksamkeit des Lesers auf die in den Figuren angegebenen Flächen, deren Gesammtheit Das bildet, was man die allgemeine einfache Form einer Gruppe nennt, d. h. die Gesammtheit der Flächen, welche in dieser Gruppe nothwendig mit irgend einer beliebigen Fläche gleichzeitig vorhanden sein müssen*).

A. Das reguläre System.

1) Die Fig. 28 entspricht den holoëdrischen Formen dieses Systems. Die allgemeine Form ist das Hexakisoktaëder. Einer beliebigen Richtung correspondiren 23 andere, welche mit ihr deckbar gleich sind, und 24 Richtungen, welche mit der ersten symmetrisch gleich sind. Die zuerst erwähnten Richtungen sind die Normalen der abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die anderen die Normalen der übrigen Flächen.

---

*) Die Flächen sind durch ihre Berührungspunkte mit der Kugeloberfläche markirt; die Punkte, welche sich über der Zeichnungsebene befinden, sind durch Kreuze bezeichnet, die darunter befindlichen durch kleine Kreise. Wenn zwei einer oberen und einer unteren Fläche entsprechende Punkte in der Projection zusammenfallen, so ist dieser Punkt durch ein Kreuz, umgeben von einem kleinen Kreise, bezeichnet. Dieselben Punkte dienen auch dazu, die relative Lage gleichwerthiger Richtungen anzugeben. Die mit demselben Buchstaben (*a* oder *b*) bezeichneten Punkte geben die Enden von deckbar gleichen, vom Centrum der Kugel ausgehenden Richtungen an, während eine mit *b* bezeichnete Richtung einer anderen, bei welcher der Buchstabe *a* steht, symmetrisch gleich ist. Die nach der unteren Hälfte der Kugel geführten Richtungen tragen die Bezeichnungen *a'* und *b'*. Wenn in der Projection die Enden zweier Richtungen auf denselben Punkt fallen, so befinden sich neben demselben die Bezeichnungen für beide Richtungen.

2) Die Fig. 27 stellt die *Hemiëdrie nach den abwechselnden einzelnen Flächen* dar. Die allgemeine Form ist ein Körper mit 24 pentagonalen Flächen, welchen man aus dem Hexakisoktaëder ableiten kann durch Weglassung der alternirenden Flächen. Die deckbar gleichen Richtungen sind in derselben Weise, wie in der vorhergehenden Gruppe, angeordnet, d. h. wie die Normalen zu den Flächen der allgemeinen Form. Symmetrisch gleiche Richtungen giebt es überhaupt nicht. Diese Hemiëdrie [27] wird von Naumann erwähnt, obgleich man sie noch nicht in der Natur entdeckt hat.

3) Fig. 31 entspricht der *tetraëdrischen Hemiëdrie.* Die allgemeine Form ist das Hexakistetraëder, welches man aus dem Hexakisoktaëder durch Weglassung derjenigen Gruppen von Flächen erhält, welche den abwechselnden Flächen des Oktaëders entsprechen. Die Anzahl der deckbar gleichen Richtungen ist die Hälfte von derjenigen in der vorhergehenden Gruppe; es sind nämlich 12 Richtungen, welche den Normalen der abwechselnden Flächen der allgemeinen Form entsprechen, während die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen den Normalen der anderen Flächen der allgemeinen Form correspondiren. Diese letzteren Richtungen sind auch in der Holoëdrie den ersteren symmetrisch gleich, während in der Hemiëdrie mit abwechselnden einzelnen Flächen sie ihnen überhaupt nicht gleich sind.

4) Fig. 30 stellt die *dodekaëdrische Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form ist das Dyakisdodekaëder (oder gebrochene Pentagondodekaëder), welches man aus dem Hexakisoktaëder erhält, wenn man die an den abwechselnden mittleren Kanten dieser Form liegenden Flächenpaare weglässt. Die deckbar gleichen Richtungen sind dieselben, wie in der vorhergehenden Gruppe, aber die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen sind andere, nämlich die den ersteren diametral entgegengesetzten Richtungen.

5) Fig. 29 entspricht der *Tetartoëdrie.* Die allgemeine Form ist das tetraëdrische Pentagondodekaëder, welches man aus dem Hexakisoktaëder ableiten kann durch Weglassung der abwechselnden oktaëdrischen Flächengruppen und der alternirenden Flächen in den übrig bleibenden Gruppen. Hier existirt Deckgleichheit zwischen denselben Richtungen, wie in den beiden vorhergehenden Hemiëdrien, aber es giebt keinerlei symmetrisch gleiche Richtungen.

B. Das tetragonale System.

1) Fig. 33 entspricht der *Holoëdrie*. Die allgemeine Form ist eine ditetragonale Pyramide. Eine beliebige Richtung ist deckbar gleich sieben anderen, welche so angeordnet sind, wie die abwechselnden Flächen der allgemeinen Form; die acht, den erwähnten diametral entgegengesetzten, Richtungen sind ihnen symmetrisch gleich.

2) Fig. 32 entspricht der *trapezoëdrischen Hemiëdrie*. Die allgemeine Form ist ein tetragonales Trapezoëder. Die deckbar gleichen Richtungen sind dieselben, wie in der vorhergehenden Gruppe, während es symmetrisch gleiche überhaupt nicht giebt.

3) Fig. 40 stellt die *sphenoidische Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form [28] ist ein tetragonales Skalenoëder. Deckbar gleich sind vier Richtungen, welche durch eine halbe Umdrehung um die Axen von 180° in dieselbe Stellung gelangen, während vier andere Richtungen, welche zu den ersteren spiegelbildlich sind in Bezug auf die Symmetrieebenen, ihnen symmetrisch gleich sind. Mit anderen Worten: die deckbar gleichen Richtungen entsprechen den Normalen zweier, an den gegenüberliegenden mittleren Kanten gelegenen Flächenpaaren, die ihnen symmetrisch gleichen den Normalen der beiden anderen Flächenpaare. Wie überhaupt in allen Hemiëdrien, Tetartoëdrien und Hemimorphien sind die gleichen Richtungen identisch mit solchen, welche auch in der Holoëdrie gleich sind.

4) Fig. 36 entspricht der *pyramidalen Hemiëdrie*. Die allgemeine Form ist eine quadratische Pyramide. Deckbar gleich sind vier Richtungen, welche durch Drehungen von 90° um die Deckaxe von 90° zusammenfallen, während die diametral entgegengesetzten Richtungen ihnen symmetrisch gleich sind. Die ersteren vier Richtungen entsprechen den Normalen derjenigen vier Flächen der allgemeinen Form, welche eine Seite der Axe von 90° schneiden, während die den ersteren symmetrisch gleichen Richtungen normal zu den anderen Flächen stehen.

5) Fig. 34 stellt die *sphenoidische Tetartoëdrie* dar. Die allgemeine Form ist ein tetragonales Sphenoid. Deckbar gleich sind in diesem Falle zwei Richtungen, welche durch eine Drehung von 180° um die Axe der sphenoidischen Symmetrie vertauscht werden, während die ihnen symmetrisch

gleichen Richtungen diejenigen sind, welche diametral entgegengesetzt sind den Richtungen, mit denen die ersteren durch eine Drehung von 90° um die Axe der sphenoidischen Symmetrie zusammenfallen. Die deckbar gleichen Richtungen entsprechen den Normalen zweier Flächen der allgemeinen Form, welche nach derselben Seite der Axe von 180° convergiren, während die ihnen symmetrisch gleichen normal zu den anderen Flächen sind.

6) Fig. 37 entspricht der *Hemimorphie der holoëdrischen Formen*. Die allgemeine Form ist die Hälfte einer ditetragonalen Pyramide, bestehend aus denjenigen acht Flächen, welche nach einer Seite der Axe von 90° convergiren. Es giebt vier deckbar gleiche Richtungen, nämlich diejenigen, welche durch Drehungen von 90° um die Axe von 90° zusammenfallen, und vier andere, den ersteren symmetrisch gleiche Richtungen, welche zu jenen in Bezug auf die Symmetrieebenen spiegelbildlich gelegen sind.

[29] 7) Fig. 35 stellt die *Hemimorphie der pyramidalen und trapezoëdrischen Hemiëdrie* dar, welche man einfach die »hemiëdrische Hemimorphie« nennen kann, weil die sphenoidische Hemiëdrie keine entsprechende Hemimorphie besitzt. Die allgemeine Form ist die Hälfte einer quadratischen Pyramide, aus denjenigen Flächen bestehend, welche nach einer Seite der Axe von 90° convergiren. Deckbar gleich sind je vier Richtungen, welche durch Drehungen von 90° um die Axe von 90° zur Deckung gelangen und den Normalen auf den Flächen der allgemeinen Form entsprechen. Symmetrisch gleiche Richtungen giebt es überhaupt nicht.

Anmerkung. Unter den eben aufgezählten Gruppen des tetragonalen Systems hat die trapezoëdrische Hemiëdrie nur einen einzigen Repräsentanten in der Natur, nämlich den Wulfenit, welcher mit mehr Grund in diese, als in irgend eine andere Gruppe zu stellen ist. Die sphenoidische Tetartoëdrie und die beiden Arten der Hemimorphie haben, soweit bekannt, in der Natur keine Repräsentanten. Die Gesetze dieser Tetartoëdrie sind trotzdem von Naumann auseinandergesetzt worden, während er der beiden Hemimorphien nicht mit einem Worte gedenkt. Es scheint jedoch, dass er sie nicht für unmöglich hält, sondern einfach deshalb nicht von ihnen spricht, weil er sich überhaupt mit der Hemimorphie sehr wenig beschäftigt. Andererseits will Naumann mehrere andere Gruppen des tetragonalen Systems aufstellen, welche

unter den in vorliegender Abhandlung aufgestellten nicht enthalten sind und nach unserer Ansicht keine besonderen Gruppen bilden können. Nach dem Vorhergehenden müssen vielmehr die Krystalle, welche er in jene Gruppen einreihen wollte, zu verschiedenen Gruppen anderer Krystallsysteme gehören. Im Folgenden sollen diese Gruppen, deren Existenz wir nicht anerkennen, einzeln betrachtet werden. Es sind die folgenden:

1) *Die rhombotype Hemiëdrie.* Die in diese Hemiëdrie eingereihten Formen betrachten wir als der holoëdrischen Gruppe des rhombischen Systems angehörig. Man hatte den Harmotom als Hauptbeispiel dieser Hemiëdrie betrachtet, bis Des Cloizeaux, gestützt auf neue Untersuchungen der optischen Eigenschaften dieses Minerals, sich für berechtigt hielt, die Krystalle desselben in das rhombische System einzureihen*) (Manuel de Minéralogie, **1**, 413). Guiscardi (Uebersicht der min. Forsch. v. Kenngott, 1859, S. 85) hat ferner die Krystalle des Guarinit dieser Hemiëdrie zuzählen wollen, eine Ansicht, welche jedoch durch Untersuchung des optischen Verhaltens dieses Minerals noch keine Bestätigung erfahren hat. Wie bei [**30**] den Krystallen des Mononatriumphosphats, welche Mitscherlich, der sie beschrieb, als rhombisch betrachtete, in der einen ihrer beiden Modificationen das Verhältniss der Makrodiagonale zur Hauptaxe = 2 : 1 ist, so könnte man diese Krystalle mit demselben Rechte, wie früher die des Harmotoms, als zur rhombotypen Hemiëdrie des tetragonalen Systems gehörig betrachten. Trotzdem hat man dies nicht gethan, und es ist sehr wahrscheinlich, dass die optische Untersuchung der betreffenden Krystalle, wenn sie ausgeführt wird, gegen die Zugehörigkeit derselben zum tetragonalen System entscheiden wird.

2) *Die rhombotype Tetartoëdrie.* Wir betrachten die hierher gerechneten Formen als der sphenoidischen Hemiëdrie des rhombischen Systems angehörig. Krystalle mit den Eigenschaften, welche man als entscheidend für diese Tetartoëdrie betrachtet, wurden bisher nicht entdeckt.

3) *Die Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie.* Die hierzu gezählten Formen rechnen wir zur Hemimorphie der holoëdrischen Formen des rhombischen Systems. Werther setzt in diese Hemiëdrie die Krystalle des Harnstoffs (Journ.

---

*) S. weiterhin die Anmerkung zum rhombischen System.

f. prakt. Chemie **35**, 51). Man muss jedoch bemerken, dass bei diesem Körper die Wirkung der Hemimorphie sich nur an der Basis (Hauptpinakoid), einer im Ganzen seltenen Form derselben, äussert, während das Sphenoid und das quadratische Prisma erster Ordnung stets mit vollständiger Flächenzahl auftreten, was dem Charakter dieser Hemimorphie widerspricht. Es scheint uns also viel natürlicher anzunehmen, dass das Fehlen einer der basischen Flächen nur ein zufälliges ist, bis eine Untersuchung der pyroëlektrischen Eigenschaften der Krystalle die Frage entschieden haben wird. Das eben für den Harnstoff Gesagte bezieht sich auch auf die Rutilvarietät, welche nach Haidinger sphenoidische Hemiëdrie mit hemimorpher Entwickelung der Basis zeigt (Kokscharow, Materialien zur Mineralogie Russlands, **4**, 36).

4) *Eine besondere Meroëdrie*, deren Formen nach unserer Ansicht als zur Holoëdrie des monoklinen Systems gehörig betrachtet werden müssen. Diese Meroëdrie wurde in Folge der Untersuchungen von G. Rose über das sulfaminsaure Ammon (Poggendorff's Annalen **47**, 476) aufgestellt. Es scheint jedoch, dass die Genauigkeit, mit welcher man die Winkel dieser Krystalle kennt, nicht genügt, um ihre wirkliche Zugehörigkeit zum tetragonalen System zu beweisen, und ausserdem liegen zur Entscheidung dieser Frage keine optischen Untersuchungen vor.

[31] C. Das hexagonale System.

1) Fig. 45 entspricht der *Holoëdrie.* Die allgemeine Form ist eine dihexagonale Pyramide. Deckbar gleiche Richtungen existiren zwölf; von diesen sind sechs diejenigen, mit denen irgend eine Richtung nach und nach zur Deckung gelangt durch Drehungen von je 60° um die Axe von 60°, während die sechs anderen so gelegen sind, dass die sechs ersteren mit ihnen zusammenfallen durch eine Drehung von 180° um irgend eine der Axen von 180°. Symmetrisch gleich sind zu jenen Richtungen die ihnen diametral entgegengesetzten. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet, wie die Normalen der abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen, wie die Normalen der anderen Flächen.

2) Fig. 44 stellt die *trapezoëdrische Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form ist ein hexagonales Trapezoëder. Die zwölf deckbar gleichen Richtungen sind dieselben, wie in der

vorhergehenden Gruppe; sie entsprechen den Normalen der Flächen der allgemeinen Form; symmetrisch gleiche Richtungen giebt es nicht. Diese Hemiëdrie wurde von Naumann angeführt, aber man hat noch keine ihr angehörige Krystalle entdeckt.

3) Fig. 48 entspricht der *rhomboëdrischen Hemiëdrie.* Die allgemeine Form ist ein hexagonales Skalenoëder. Irgend eine Richtung ist deckbar gleich zwei anderen, mit denen sie durch Drehungen von 120° um die Axe von 120° zusammenfällt, und drei anderen, mit denen die ersteren durch eine Drehung von 180° um irgend eine der Axen von 180° zur Deckung gelangen. Den genannten sechs Richtungen symmetrisch gleich sind sechs andere, nämlich die ihnen diametral entgegengesetzten. Die deckbar gleichen Richtungen entsprechen den Normalen der Flächenpaare, welche an den abwechselnden Mittelkanten der allgemeinen Form liegen, während die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen angeordnet sind, wie die Normalen der anderen Flächen dieser Form.

4) Fig. 51 stellt die *pyramidale Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form ist eine hexagonale Pyramide dritter Ordnung. Deckbar gleich sind je sechs Richtungen, welche durch Drehungen von 60° um die Axe von 60° zusammenfallen, und diesen symmetrisch gleich sechs andere Richtungen, welche zu ihnen spiegelbildlich liegen in Bezug auf die Symmetrieebene. Die ersteren entsprechen den Normalen [**32**] derjenigen Flächen der allgemeinen Form, welche nach einer Seite der Axe von 60° convergiren, während die den ersteren symmetrisch gleichen Richtungen den Normalen der anderen Flächen dieser Form parallel sind.

5) Fig. 49 entspricht der *trigonotypen Hemiëdrie.* Die allgemeine Form ist eine ditrigonale Pyramide. Es giebt sechs deckbar gleiche Richtungen; drei von ihnen fallen durch Drehungen von 120° um die Axe von 120° zusammen, während die drei anderen mit ersteren zur Deckung gelangen durch eine Drehung von 180° um irgend eine der Axen von 180°. Ausserdem giebt es noch sechs den eben genannten symmetrisch gleiche Richtungen, nämlich diejenigen, welche ihnen in Bezug auf eine der Symmetrieebenen entgegengesetzt sind. Die deckbar gleichen Richtungen entsprechen den Normalen auf den abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die ihnen symmetrisch gleichen den Normalen zu den anderen Flächen dieser Form. Diese Hemiëdrie ist von Naumann

angegeben worden, obgleich man noch keinen Repräsentanten derselben in der Natur gefunden hat.

6) Fig. 56 stellt die *rhomboëdrische Tetartoëdrie* dar. Die allgemeine Form ist ein Rhomboëder dritter Ordnung. Deckbar gleich sind je drei Richtungen, welche durch Drehungen von 120° um die Axe von 120° vertauscht werden; die diametral entgegengesetzten Richtungen sind ihnen symmetrisch gleich. Die deckbar gleichen Richtungen entsprechen den Normalen auf denjenigen Flächen der allgemeinen Form, welche nach einer Seite der Axe von 120° convergiren, während die ihnen symmetrisch gleichen angeordnet sind, wie die Normalen der anderen Flächen.

7) Fig. 47 entspricht der *trapezoëdrischen oder trigonotypen Tetartoëdrie.* Die allgemeine Form ist ein trigonales Trapezoëder. Es existiren hier sechs deckbar gleiche Richtungen; drei derselben fallen durch Drehungen von 120° um die Axe von 120° zusammen, während die drei anderen mit ihnen durch eine Drehung von 180° um eine der Axen von 180° zur Deckung gelangen. Diese Richtungen entsprechen den Normalen der Flächen der allgemeinen Form. Symmetrisch gleiche Richtungen giebt es in diesem Falle nicht.

8) Fig. 54 repräsentirt eine Tetartoëdrie, welche wir nach Analogie die *pyramidale Tetartoëdrie* nennen wollen. Die allgemeine Form ist eine trigonale Pyramide dritter Ordnung. Deckbar gleich sind diejenigen drei Richtungen, welche durch Drehungen von 120° um die Axe von 120° ihre Stellung vertauschen; symmetrisch gleich sind jenen drei andere Richtungen, welche zu ihnen symmetrisch gestellt sind in Bezug [33] auf die Symmetrieebene. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet, wie die Normalen zu denjenigen Flächen der allgemeinen Form, welche nach einer Seite der Axe von 120° convergiren, während die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen den Normalen der anderen Flächen entsprechen. Man hat in der Natur noch keine Krystalle gefunden, welche diese Art von Tetartoëdrie zeigen, und dieselbe wird auch von Naumann nicht erwähnt. Die Ursache des letzteren Umstandes finden wir in den folgenden Worten Naumann's (Elemente der theoretischen Krystallographie, 1856, S. 215). Bei der Besprechung der verschiedenen Tetartoëdrien des hexagonalen Systems sagt er: »Wie bei der Hemiëdrie, so *scheint* auch bei der Tetartoëdrie die zu Anfang von § 121 erwähnte Gliederung der dihexagonalen

Pyramiden berücksichtigt werden zu müssen, so dass also von je vier, über einem Sextanten der Basis gelegenen Flächen allemal eine zurückbleibt, während die drei anderen verschwinden. Unter dieser *Voraussetzung* sind aber nur zwei Modalitäten der Tetartoëdrie möglich.« Der Schluss ist richtig, aber die Voraussetzung, welche ihm zur Basis dient, ist für uns nicht annehmbar, denn man erhält die Formen der pyramidalen Tetartoëdrie, wenn man in jeder der Flächengruppen der abwechselnden Sextanten zwei Flächen behält, entweder die beiden rechten oder die beiden linken. Wir können nicht begreifen, warum Naumann die Bedingung aufstellen musste, dass nothwendig eine Fläche in jedem Sector von 60° zurückbleiben müsse. Es scheint uns nicht, dass die Symmetrie (wir gebrauchen hier das Wort in dem Sinne, welchen Naumann ihm giebt) des hexagonalen Systems durch Weglassung aller Flächen der abwechselnden Sectoren leide, weil wir alsdann von den vier, an irgend einer der horizontalen Axen liegenden Sectoren in zweien derselben die Flächen weglassen, und zwar so, dass das Gleiche für jede dieser Axen stattfindet. Die Hypothese Naumann's kann noch einer anderen Betrachtung unterworfen werden. In irgend einer Krystallreihe des hexagonalen Systems kann man *beliebig* wählen zwischen zwei Systemen der horizontalen Axen, von denen die einen die Winkel der anderen halbiren. Es giebt Nichts, was uns *zwingt*, in den Formen der trigonotypen Hemiëdrie und der trapezoëdrischen Tetartoëdrie gerade dasjenige der beiden Axensysteme zu wählen, für welches die oben erwähnte Voraussetzung Naumann's Gültigkeit besitzt. Indem wir das andere System wählen, haben wir andere Sectoren von 60°, welche vollkommen das gleiche Recht haben, an die Gesetze der Symmetrie (wie Naumann es nennt) des hexagonalen Systems gebunden zu sein, wie die ersten. Berücksichtigen wir aber diese neuen Sectoren bei der Ableitung der Formen der trigonotypen Hemiëdrie und der trapezoëdrischen Tetartoëdrie von denen der Holoëdrie, [**34**] so sind wir gezwungen, alle Flächen der abwechselnden Sectoren verschwinden zu lassen. In Kapitel VI soll der Charakter der Formen der pyramidalen Tetartoëdrie specieller auseinandergesetzt werden.

9) Fig. 52 stellt *die Hemimorphie der holoëdrischen Formen* dar. Die allgemeine Form ist die Hälfte einer dihexagonalen Pyramide, von der nur diejenigen Flächen beibehalten sind, welche nach einer Seite der Axe von 60° convergiren.

Es giebt hier sechs deckbar gleiche Richtungen, welche durch successive Drehungen von 60° um die Axe von 60° in die gleiche Stellung gelangen, während sechs andere Richtungen, welche je den ersteren in Bezug auf eine der Symmetrieebenen entgegengesetzt liegen, ihnen symmetrisch gleich sind. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet, wie die Normalen der abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die ihnen symmetrisch gleichen, wie die Normalen der übrigen Flächen dieser Form. Der Greenockit krystallisirt in dieser Hemimorphie.

10) Fig. 50 entspricht *der Hemimorphie der trapezoëdrischen und pyramidalen Hemiëdrie.* Die allgemeine Form ist die Hälfte einer hexagonalen Pyramide, in welcher diejenigen Flächen beibehalten sind, welche nach einer Seite der Axe von 60° convergiren. Deckbar gleich sind sechs Richtungen, welche durch Drehungen von je 60° um die Axe von 60° zusammenfallen und den Normalen der Flächen der allgemeinen Form entsprechen; symmetrisch gleiche Richtungen existiren in diesem Falle nicht. Bis jetzt hat man noch keine Krystalle gefunden, deren Formen dem Gesetze dieser Hemimorphie gehorchen, und Naumann erwähnt dasselbe auch nicht.

11) Fig. 55 repräsentirt die *Hemimorphie der rhomboëdrischen und trigonotypen Hemiëdrie.* Die allgemeine Form ist die Hälfte eines Skalenoëders oder einer ditrigonalen Pyramide, bestehend aus denjenigen Flächen, welche nach einer Seite der Axe von 120° convergiren. Es giebt hier drei deckbar gleiche Richtungen, nämlich diejenigen, welche durch Drehungen von 120° um die diesem Winkel entsprechende Axe in einander übergehen; drei andere, in Bezug auf eine der Symmetrieebenen den ersteren entgegengesetzt, sind ihnen symmetrisch gleich. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet, wie die Normalen der abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die ihnen symmetrisch gleichen, wie die Normalen zu den übrigen Flächen.

12) Fig. 53 entspricht *der Hemimorphie aller Tetartoëdrien.* Die allgemeine Form ist die Hälfte einer trigonalen Pyramide dritter Ordnung, von welcher nur diejenigen Flächen beibehalten sind, welche nach einer Seite der Axe von 120° convergiren. Auch in diesem Falle existiren drei deckbar gleiche Richtungen, [**35**] welche durch Drehungen von 120° um die Axe von 120° in einander übergehen; dieselben

entsprechen den Normalen zu den Flächen der allgemeinen Form. Symmetrisch ihnen gleiche Richtungen existiren hier jedoch nicht. Man hat in der Natur noch keinen Repräsentanten dieser Hemimorphie, welche Naumann auch nicht erwähnt, aufgefunden.

D. Das rhombische System.

1) Fig. 39 entspricht der *Holoëdrie*. Die allgemeine Form ist ein rhombisches Oktaëder. Vier Richtungen, welche man durch Drehungen von 180° um die Axen von 180° mit irgend einer von ihnen zusammenfallen lassen kann, sind deckbar gleich. Vier andere, den ersteren diametral entgegengesetzte Richtungen sind ihnen symmetrisch gleich. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet, wie die Normalen der abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die ihnen symmetrisch gleichen, wie die Normalen der anderen Flächen dieser Form.

2) Fig. 38 stellt die *sphenoidische Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form ist ein rhombisches Sphenoid. Die deckbar gleichen Richtungen, den Normalen der Flächen der allgemeinen Form entsprechend, sind dieselben, wie in der Holoëdrie; symmetrisch gleiche existiren überhaupt nicht.

3) Fig. 43 entspricht der *Hemimorphie der holoëdrischen Formen*. Die allgemeine Form ist die Hälfte eines rhombischen Oktaëders, von welchem diejenigen Flächen beibehalten sind, welche nach einer Seite einer der Axen von 180° convergiren. Hier giebt es zwei deckbar gleiche Richtungen, nämlich diejenigen, welche durch eine Drehung von 180° um die Axe von 180° vertauscht werden, während zwei andere Richtungen, symmetrisch zu jenen in Bezug auf eine der Symmetrieebenen, ihnen symmetrisch gleich sind. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet, wie die Normalen zu den abwechselnden Flächen der allgemeinen Form, die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen, wie die Normalen der anderen Flächen derselben.

Anmerkung. Naumann erwähnt im rhombischen System noch die folgenden beiden Gruppen:

1) Eine *Meroëdrie* mit monoklinem Charakter der Formen. Diese Gruppe gehört offenbar zum monoklinen System und darf von der Holoëdrie desselben nicht getrennt werden. Man hat den Datolith und den [**36**] Wolframit als die Hauptrepräsentanten dieser Meroëdrie betrachtet. Die Arbeiten von

Schröder (Poggendorff's Ann. **94**, 235) und Dauber (ebenda **103**, 116) haben die Zugehörigkeit des Datolith zum monoklinen System wahrscheinlich gemacht, und dies ist später bestätigt worden durch die Untersuchung seiner optischen Eigenschaften (Des Cloizeaux, Manuel d. minéral. **1**, 170). Was den Wolframit betrifft, so rechnen ihn jetzt mehrere Krystallographen in das monokline System; da aber dieses Mineral undurchsichtig ist, wird wahrscheinlich die Bestätigung jener Meinung durch die Untersuchung der physikalischen Eigenschaften noch längere Zeit auf sich warten lassen. Ferner hat man dieser Meroëdrie zugezählt den Prosopit und das Kaliumferrocyanid, welche jedoch nach ihren optischen Eigenschaften, der erstere in das trikline, das zweite in das monokline System eingereiht werden müssen. Von verschiedenen Autoren sind auch die Krystalle folgender Körper in diese Meroëdrie gestellt worden: der Kaliglimmer, der Tenorit, das weinsaure Ammonium-Strontium und das Eisenchlorür, während einige dieser Körper von anderen Autoren als monoklin krystallisirend betrachtet wurden. Diese Frage kann erst beantwortet werden, wenn genauere Winkelmessungen oder eine entscheidende optische Untersuchung vorliegen. Es sei gestattet, an dieser Stelle zu bemerken, dass selbst die Existenz dreier, mit mathematischer Genauigkeit auf einander senkrechter Zonen für uns keinen genügenden Grund abgeben würde, solche Krystalle in das rhombische System zu setzen; auf diesen Punkt werden wir in den folgenden Kapiteln noch ausführlicher zurückkommen. Endlich sind hier noch einige Worte zu bemerken hinsichtlich des Harmotom, welchen Des Cloizeaux (Man. d. min. **1**, 413) als rhombisch betrachtet und dessen Formen er eine monokline Hemiëdrie zuschreibt. Selbst die Möglichkeit der Existenz dieser Meroëdrie zugegeben, scheint es uns viel mehr begründet, die Krystalle des Harmotom als monoklin und die Normale zu den Flächen p als Orthodiagonale zu betrachten. Die Flächen $b^{1/2}$ bildeten alsdann eine Hemipyramide, und die Flächen m zwei Orthodomen, was auch den hemiëdrischen Charakter derselben erklären würde. Wenn man erwägt, dass diese Krystalle nicht drei auf einander senkrechte Pinakoide resp. Zonen besitzen, und dass in Folge dessen ihre Zugehörigkeit zum rhombischen System nur auf der Möglichkeit, die Flächen auf rechtwinkelige Axen zu beziehen, beruht, wenn man ferner erwägt, dass die Messung der Winkel nicht mit genügender Genauigkeit

ausführbar ist, so leuchtet ein, dass die Motive dafür, diese Krystalle als rhombisch zu betrachten, keineswegs entscheidende sind. Bemerkenswerth ist, dass gerade für dieses Mineral, wegen der unmerklichen Dispersion der optischen Axen, [**37**] die optischen Eigenschaften nicht geeignet sind, die Entscheidung zwischen der Zugehörigkeit zum rhombischen oder zum monoklinen System zu gestatten.

2) *Die Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie.* Man könnte in diese Gruppe rechnen das neutrale weinsaure Kalium und Ammonium-Kalium, das äpfelsaure Ammonium und den Milchzucker. An den Krystallen des zuerst erwähnten Körpers hat man sogar die für die Hemimorphie charakteristischen Erscheinungen der polaren Pyroëlektricität entdeckt. Es muss bemerkt werden, dass man nicht auf eine grosse Genauigkeit bei der Messung der Winkel dieser Krystalle rechnen kann. Man muss daher wohl diejenigen von ihnen in die Hemimorphie des monoklinen Systems einreihen, bei denen nicht das zufällige Fehlen irgend einer Fläche vorliegt, welches man durch die Hemimorphie hat erklären wollen.

E. Das monokline System.

1) Fig. 42 entspricht der *Holoëdrie.* Die allgemeine Form ist eine monokline Hemipyramide. Es giebt hier zwei deckbar gleiche Richtungen, nämlich diejenigen, welche durch eine Drehung von 180° um die Axe von 180° vertauscht werden; zwei andere, den ersten diametral entgegengesetzte Richtungen sind ihnen symmetrisch gleich. Die deckbar gleichen Richtungen sind angeordnet wie die Normalen zweier Flächen der allgemeinen Form, welche nach derselben Seite der Axe von 180° (der Orthodiagonale) convergiren, während die ihnen symmetrisch gleichen Richtungen den Normalen zu den anderen Flächen jener Form entsprechen.

2) Fig. 46 stellt die *Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form ist die Hälfte einer Hemipyramide, bestehend aus denjenigen beiden Flächen, welche in Bezug auf die Symmetrieebene zu einander symmetrisch gestellt sind. Symmetrisch gleich sind je zwei, in Bezug auf die Symmetrieebene zu einander symmetrische Richtungen, welche den Normalen zu den Flächen der allgemeinen Form entsprechen. Deckbar gleiche Richtungen giebt es überhaupt nicht. Diese Hemiëdrie ist in der Natur noch nicht entdeckt worden und wird auch von Naumann nicht erwähnt.

3) Fig. 41 entspricht *der Hemimorphie.* Die allgemeine Form ist die Hälfte einer Hemipyramide, von welcher nur die beiden Flächen beibehalten sind, welche nach derselben Seite der Axe von 180° convergiren. Es existiren hier zwei deckbar gleiche Richtungen, welche durch eine Drehung von 180° um die Axe von 180° vertauscht werden und so angeordnet sind, wie die Normalen zu den Flächen der allgemeinen Form. Symmetrisch gleiche Richtungen giebt es nicht.

[38] *Anmerkung.* Naumann (Elemente der theoretischen Krystallographie, S. 325) drückt sich so aus, dass man annehmen muss, er betrachte die von Pasteur beschriebene Hemiëdrie als verschieden von der Hemimorphie, wie man sie z. B. an den Krystallen des Rohrzuckers beobachtet. Es ist uns aber ganz unmöglich, irgend einen Unterschied zwischen den Gesetzen dieser Hemiëdrie und denen der Hemimorphie zu finden. Pasteur betrachtet die gleichzeitige Existenz aller Flächen der Form, welche er Tetraëder nennt (in unserer Terminologie Sphenoid), nicht als nothwendig. Er erwähnt mehrere Fälle, in denen man nur zwei Flächen dieses Tetraëders beobachtet, und drückt sich dann an einer Stelle ganz deutlich über diese Frage aus, indem er sagt: »es würde die Existenz des einen oder des anderen dieser Flächenpaare genügen, um die nicht deckbare Hemiëdrie hervorzubringen« (Ann. d. Chim. et d. Phys. III. Sér. 38, 448).

F. Das trikline System.

1) Fig. 57 entspricht der *Holoëdrie.* Die allgemeine Form besteht in einem Paare paralleler Flächen. Symmetrisch gleich sind je zwei Richtungen, nämlich die einander diametral entgegengesetzten, welche den Normalen zu den Flächen der allgemeinen Form entsprechen. Deckbar gleiche Richtungen giebt es hier überhaupt nicht.

2) Fig. 58 stellt die *Hemiëdrie* dar. Die allgemeine Form ist eine einzelne Fläche. Es existiren überhaupt keine gleichwerthigen Richtungen. Naumann erwähnt diese Hemiëdrie nicht. Trotzdem giebt es einen Körper, dessen Krystalle aller Wahrscheinlichkeit nach in diese Gruppe gestellt werden müssen, d. i. das von Scacchi (Pogg. Ann. 109, 313) beschriebene saure weinsaure Strontium. An diesen Krystallen sind acht verschieden geneigte Flächen beobachtet worden; fünf von diesen treten ohne ihre Parallelen auf, die einen immer, die anderen nur unter gewissen Umständen bei der

Bildung der Krystalle. Drei andere Flächen wurden stets mit ihren Parallelen gleichzeitig beobachtet, aber es zeigte sich eine Verschiedenheit in den physikalischen Eigenschaften zwischen einer jeden dieser Flächen und der ihr parallelen. Diese Differenz liess sich erkennen durch die Art und Weise, in welcher sich andere Krystalle auf diese Flächen auflagerten, oder durch die, von der Combination mehrerer Individuen hervorgebrachte Krümmung dieser Flächen, oder endlich durch die Orientirung derselben in Bezug auf die Anwachsstellen des Krystalls.

Anmerkung. Mehrere Autoren erkennen noch die Existenz eines siebenten Krystallsystems, welches man das *dikline* genannt hat, an. Dieses wurde von Mitscherlich (1826) aufgestellt, welcher die besonderen Gesetzmässigkeiten desselben [**39**] an den Formen des unterschwefligsauren Kalkes zu entdecken glaubte. Der diesem System zugeschriebene Charakter wird bestimmt durch zwei Coordinatenebenen, welche einen rechten Winkel einschliessen, und durch den Umstand, dass das der Schnittrichtung dieser beiden Ebenen parallele Prisma stets vollflächig ist, d. h. dass seine vier Flächen immer gleichzeitig an demselben Krystalle auftreten; in allen übrigen Beziehungen unterscheidet sich dieses System nicht von dem triklinen. 1862 unterwarf Zepharovich die Krystalle des Calciumhyposulfit einer erneuten Untersuchung (Sitzungsberichte d. math.-naturwiss. Kl. d. Akad. d. Wiss. Wien **45**, 499); er betrachtet die Form dieses Salzes als triklin, weil der Winkel zwischen den Coordinatenebenen, welcher 90° sein sollte, sich zu 90° 12′ 20″ ergab, und weil ausserdem das oben erwähnte Prisma nicht immer mit allen vier Flächen ausgebildet war; ein paralleles Paar seiner Flächen ist stets stärker entwickelt, als das andere, und dessen Flächen sind glänzender, so dass also auch ein physikalischer Unterschied der beiden Flächenpaare nachzuweisen ist. Die an den von Zepharovich untersuchten Krystallen beobachteten Flächen, im Ganzen 15 Paare, waren dieselben, welche Mitscherlich gefunden hatte, mit Ausnahme eines einzigen, welches Ersterer nicht wiederfinden konnte. Mehrere der gemessenen Winkel ergaben sich auf 1′—2′ übereinstimmend mit den von Mitscherlich angegebenen, während andere grössere Differenzen zeigten, welche in einem Falle bis zu 56′ stiegen. Zepharovich glaubt jedoch nicht annehmen zu dürfen, dass die Differenz seiner Werthe von denen Mitscherlich's auf einer

Ungenauigkeit der Messungen des Letzteren beruhen; er nimmt vielmehr an, dass das von Mitscherlich untersuchte Salz eine andere Zusammensetzung gehabt habe oder unter anderen Umständen krystallisirt sei, als das von ihm untersuchte. Trotzdem kann man nicht leugnen, dass die Arbeit Zepharovich's das Recht Mitscherlich's, ein neues Krystallsystem auf Eigenthümlichkeiten der Formen jenes Salzes, die man nicht wieder zu erhalten im Stande war, zu gründen, einigermaassen in Zweifel stellt. Nach Mitscherlich hat man die Krystallformen noch anderer Körper in das dikline System stellen wollen, nämlich: das Cinchoninperchlorat [Dauber, Ann. d. Chem. u. Pharm. 1849, **71**, 66], das salicylsaure Zink (Grailich, Krystallographisch-optische Untersuchungen 1859, S. 185), das Strontiumtrivanadat (Handl, Sitzungsber. d. Math. Kl. d. Akad. d. Wiss. Wien 1859, **37**, 391) und die Cuminsäure (Schabus, Poggend. Ann. 1862, **116**, 412). Wie es scheint, schloss Dauber auf die Zugehörigkeit der Krystalle des überchlorsauren Cinchonins zum diklinen System nur aus dem Grunde, weil eine Fläche an denselben auftritt (parallel der [**40**] Spaltbarkeit), welche die scharfen Kanten des rhombischen Prismas symmetrisch abstumpft. Wenn man aber berücksichtigt, dass die beiden, als doppelt schiefe Basisflächen bezeichneten Ebenen, welche nach seiner Angabe nicht parallel sind, zu den Flächen des Prismas rechts und links von dessen stumpfer Kante gleich geneigt sind, so folgt daraus, dass diese Form eine zur Spaltungsebene senkrechte Deckaxe von 180° besitzt und demgemäss zur Hemimorphie des monoklinen Systems gehört. Was das salicylsaure Zink betrifft, so glaubt Grailich, dass man seine Form nur deshalb als diklin betrachten könnte, weil zwei zu einander senkrechte Flächen an derselben auftreten; ein Prisma, welches der Kante dieser beiden Flächen parallel wäre, ist nicht vorhanden. Der angegebene Grund könnte nur dann von Wichtigkeit sein, wenn man im Stande gewesen wäre, die Winkel mit einer grossen Genauigkeit zu messen, was wir nicht annehmen können; Grailich sagt selbst, dass die gemessenen Krystalle fast mikroskopisch waren, und giebt für einen Winkel zwei Werthe an, welche um 11′ differiren. Warum Handl das dreifach vanadinsaure Strontium als diklin krystallisirend betrachtet hat, ist uns unerfindlich. Seine Abhandlung enthält keine Angaben über die Winkel der von ihm adoptirten Coordinatenebenen mit Ausnahme einer einzigen Stelle, an

welcher er sagt, dass die Axen der beiden Zonen, welche zweien der Coordinatenaxen parallel sind, mit einander einen rechten Winkel bilden. Auf Grund seiner berechneten Winkel und der von ihm angegebenen Symbole der Flächen haben wir die Elemente der von ihm angenommenen Coordinatenaxen berechnet und für die Winkel zwischen den Coordinatenebenen gefunden: $A = 88^\circ\,3'$, $B = 84^\circ\,59'$, $C = 89^\circ\,50'$; für die Winkel zwischen den Axen: $(bc) = 88^\circ\,4'$, $(ac) = 84^\circ\,59'$, $(ab) = 90^\circ$; für die Axenlängen: $c = 1$, $\log a = 0{,}60311-1$, $\log b = 0{,}69083-1$. Obgleich hiernach einer der Winkel zwischen den Coordinatenebenen nur $10'$ von 90° abweicht, so kann diese Differenz doch nicht einem Fehler zugeschrieben werden, denn wenn dieser Winkel gleichzeitig mit einem Axenwinkel ein rechter wäre, so würde eine der Axen senkrecht auf der Ebene der beiden anderen stehen, wie im monoklinen System. Nun sind aber die von Handl angegebenen Neigungen der Flächen, ebenso wie ihre Indices, mit einer solchen Annahme unverträglich, und dazu kommt noch, dass das der Axe parallele Prisma nur mit einem Flächenpaare ausgebildet ist. Was endlich die Krystalle der Cuminsäure betrifft, so betrachtet Schabus ihre Zugehörigkeit zum diklinen System als wahrscheinlich, weil sie zwei auf einander senkrechte Pinakoide zeigen. Es ist jedoch nicht bewiesen, dass dieser Winkel wirklich ein rechter ist, und Schabus sagt selbst, dass in Folge unvollkommener Flächenbeschaffenheit des einen dieser Pinakoide die Winkel desselben zu den anderen Flächen nicht [41] genau gemessen werden konnten, so dass für den Winkel zwischen den beiden Pinakoiden Werthe von $89^\circ\,15'$ bis $90^\circ\,20'$ gefunden wurden. Auch muss bemerkt werden, dass Schabus zwei, der Kante jener beiden Pinakoide parallele Hemiprismen, aber jedes derselben nur mit zwei parallelen Flächen, beobachtete.

Somit stellt sich heraus, dass man keinen einzigen Körper kennt, von dessen Krystallen man sagen könnte, dass sie unzweifelhaft die dem diklinen System zugeschriebenen Eigenschaften hätten. Wir gehen noch weiter und sagen, dass wir, selbst wenn es solche Krystalle in der Natur gäbe, trotzdem das dikline System nicht als ein besonderes Krystallsystem annehmen würden; dieser Gegenstand soll in den folgenden Kapiteln ausführlicher behandelt werden. Die gleichen Bemerkungen beziehen sich auf alle Unterabtheilungen der Systeme, welche von verschiedenen Krystallographen angenommen

wurden und sich nicht unter den 32, weiter oben aus dem von uns adoptirten Principe abgeleiteten, Gruppen befinden. Es giebt nicht einen einzigen Körper, dessen Krystalle positiv die Charaktere einer dieser Unterabtheilungen zeigen, deren Existenz als besondere Gruppe wir in Abrede stellen würden, selbst wenn in der Natur Krystalle vorkämen, welche alle Eigenschaften, die man für diese Unterabtheilungen als charakteristisch betrachtet, besässen.

Kapitel V.

Anordnung und Dimensionen der charakteristischen krystallographischen Axen.

§ 21. Es bleibt nun noch eine wichtige Frage zu beantworten, d. i. diejenige der Uebereinstimmung der in jeder Gruppe möglichen Krystallformen, welche wir aus den im Vorhergehenden erläuterten Gesetzen der Deckbarkeit und Symmetrie abgeleitet haben, mit den möglichen Formen, welche sich aus der in der Krystallographie allgemein adoptirten Methode ergeben. In letzterer stellt man gewisse Systeme von Coordinatenaxen auf, denen man bestimmte Charaktere zuschreibt, auf welche dann bei der Ableitung der Formen Rücksicht genommen werden muss. Prüft man nun die so in der Krystallographie hergeleiteten Formen, so kann man sich leicht überzeugen, dass in den Unterabtheilungen der verschiedenen Krystallsysteme immer dieselben Deckaxen, Symmetrieebenen u. s. w. existiren, welche wir für die von uns aufgestellten krystallographischen Gruppen als charakteristisch betrachten. Der Beweis jedoch für die vollständige Identität der Resultate beider Methoden erfordert noch die Prüfung der Frage, ob in den durch unser Verfahren festgestellten Gruppen nothwendigerweise [42] dieselben krystallographischen Axen mit denselben Eigenschaften, welche man ihnen nach der anderen Methode zuschreibt, existiren. Diese Untersuchung wird uns zeigen, dass in der That in gewissen Gruppen das Vorhandensein charakteristischer Axen mit den ihnen zugeschriebenen Eigenschaften keine nothwendige Consequenz der Anordnung der Flächen ist, welche durch die Deckaxen und die Symmetrieebenen bestimmt wird. Daraus folgt, dass die Methode der Coordinatenaxen stillschweigend eine Hypothese enthält, welche die Möglichkeit gewisser Formen ausschliesst. Es scheint uns wichtig, diese Hypothese in's Licht zu stellen

und die Gründe zu untersuchen, welche für ihre Annahme maassgebend sein konnten.

§ 22. Es soll zunächst bewiesen werden, dass *eine Deckaxe von 180°, 90° oder 60° nothwendigerweise gleichzeitig eine krystallographische Axe ist.*

Eine gegen die Deckaxe geneigte, mögliche krystallographische Axe fällt durch eine Drehung von 180° um die Deckaxe mit einer anderen Geraden zusammen, welche nothwendig ebenfalls eine mögliche krystallographische Axe sein wird. Diese beiden krystallographischen Axen und die Deckaxe liegen also in derselben Ebene, welche zugleich eine mögliche Krystallfläche ist. Eine andere, gegen die Deckaxe geneigte, mögliche krystallographische Axe, welche nicht in der vorher erwähnten Ebene liegt, bestimmt in derselben Weise eine andere, ebenfalls durch die Deckaxe gehende, mögliche Krystallfläche. Daraus folgt, dass diese Axe, in welcher zwei mögliche Krystallflächen einander schneiden, eine mögliche krystallographische Axe ist. Dieser Beweis ist jedoch kein vollständiger, bis nachgewiesen worden ist, dass nothwendig stets zwei gegen die Deckaxe geneigte, mögliche krystallographische Axen, welche nicht beide mit jener in derselben Ebene liegen, vorhanden sein müssen. Dies zwingt uns zu einer eingehenden Erörterung dieses Gegenstandes.

Damit das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse einen Sinn habe, muss es nothwendig wenigstens drei Flächen geben, welche nicht derselben Geraden parallel sind. Legt man durch irgend einen Punkt drei Ebenen parallel diesen Flächen, so werden deren Durchschnitte drei Gerade bilden, welche nicht in derselben Ebene liegen. Wenn man durch denselben Punkt eine Gerade parallel der Deckaxe von 180°, 90° oder 60° zieht, und wenn einer der Durchschnitte jener Ebenen mit dieser Axe zusammenfällt, so wird letztere eine mögliche krystallographische Axe sein. Findet diese Coïncidenz nicht statt, so muss, da alle drei Durchschnitte sich nicht zugleich in einer zur Deckaxe senkrechten Ebene befinden können, wenigstens einer derselben einen schiefen

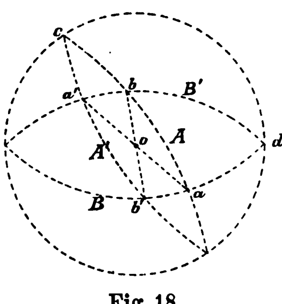


Fig. 18.

Winkel mit dieser Axe bilden. Seien A und B (Fig. 18) zwei Krystallflächen, deren Durchschnittsrichtung a zur Deckaxe o geneigt ist. [43] Eine Drehung von 180° um diese Axe lässt diese Flächen mit zwei anderen A' und B' zusammenfallen, welche einander in einer Geraden a' schneiden, und mit dieser fällt die Gerade a in Folge derselben Drehung zusammen, so dass die drei Geraden a, a' und o sich in derselben Ebene befinden. Es soll nun bewiesen werden, dass die Gerade b, der Durchschnitt der Ebenen A und B', nicht senkrecht zu o sein kann. In der That würde in diesem Falle die Gerade b mit den Geraden c und d, in welchen die Flächen A und B' die zu o senkrechte Ebene schneiden, zusammenfallen, und alle vier Flächen A, B, A', B' würden einander in einer einzigen Geraden b schneiden, und diese wäre senkrecht zu o, was der bei der Wahl der Flächen gemachten Voraussetzung widerspricht. Eine Drehung von 180° um die Axe o vertauscht die Gerade b mit der Geraden b', der Schnittrichtung von A' und B. Die beiden durch a und a', resp. b und b' bestimmten Ebenen sind mögliche Krystallflächen, weil sie durch je zwei mögliche krystallographische Axen gehen. Wenn diese beiden Ebenen nicht in eine einzige zusammenfallen, so muss ihre Durchschnittsrichtung, d. h. die Deckaxe o, eine mögliche krystallographische Axe sein.

Wenn dagegen die Geraden b und b' mit a und a' in dieselbe Ebene fallen, so müssen sie sich mit ihnen decken, denn sonst würden die Ebenen A und B zusammenfallen, was der Annahme bei der Wahl dieser Ebenen widerspricht. Wenn aber die Geraden b und b' sich mit den Geraden a und a' decken, so wird eine der Ebenen A oder B durch die Deckaxe o gehen (Fig. 19). Man kann dann beweisen, dass in diesem Falle noch eine andere Krystallfläche existiren muss, welche durch die Deckaxe geht oder zu ihr geneigt ist. Denn es müssen, damit das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse einen Sinn hat, ausser dreien, nicht derselben Geraden parallelen Flächen noch wenigstens zwei andere Flächen vorhanden sein, von denen keine den vier ersten parallel ist. Wenn eine dieser beiden Flächen

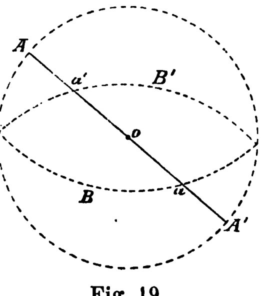


Fig. 19.

senkrecht zur Axe o ist, so wird die andere C es nicht sein, und alsdann haben wir einen der beiden folgenden Fälle: 1) die Fläche C geht durch die Axe o und fällt nicht mit der Fläche A zusammen, oder 2) sie ist geneigt zu dieser Axe, ohne mit einer der Flächen B oder B' zusammenzufallen. Im ersteren Falle wird die Axe o als Durchschnitt zweier Krystallflächen eine mögliche krystallographische Axe sein. Im zweiten Falle haben wir zwei zur Axe o geneigte Flächen B und C, welche nicht durch eine Drehung um diese Axe zur Deckung gebracht werden können. Wenn der Durchschnitt dieser Flächen eine zur Axe o geneigte Gerade ist, so muss diese Axe, wie oben bewiesen worden ist, eine mögliche krystallographische Axe sein. Wenn dagegen in der ganzen Krystallreihe nicht zwei zur Deckaxe geneigte Flächen existiren, deren Durchschnitt ebenfalls zu dieser Axe geneigt ist, so braucht die letztere nicht die Eigenschaften einer krystallographischen Axe zu besitzen. In diesem Falle giebt es nur [**44**] die folgenden möglichen Flächen: 1) zwei einander und der Deckaxe parallele Flächen, 2) eine unendliche Anzahl von Flächen, welche einer und derselben, zur Deckaxe senkrechten, Geraden parallel sind. In diesem Falle ist die Deckaxe von 180° nicht nothwendig eine mögliche krystallographische Axe; wir wollen eine solche Axe von 180° mit dem Namen einer irrationalen Axe von 180° bezeichnen.

Eine zu einer irrationalen Axe von 180° senkrechte Ebene ist keine mögliche Krystallfläche, wie aus Folgendem hervorgeht. Es sei die Zeichnungsebene (Fig. 20) die durch die Axe von 180° ah gehende, mögliche Krystallfläche, und es seien ausserdem al und ap die beiden Durchschnitte derselben mit zwei anderen Krystallflächen, welche durch eine Drehung von 180° um ah zur Deckung gelangen. Die Kante zwischen diesen beiden Flächen ist eine Gerade ausserhalb der Zeichnungsebene und senkrecht zu ah; wir wollen sie mit aA bezeichnen. Die Geraden ap und al sind mögliche krystallographische Axen und bilden mit der Deckaxe gleiche Winkel. Die Bedingung für die Möglichkeit verschiedener Flächen ist gegeben durch ihren Parallelismus mit der Geraden aA und ausserdem durch die Rationalität der Verhältnisse

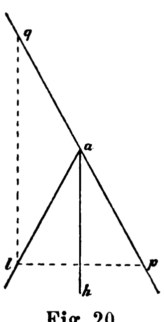


Fig. 20.

derjenigen Parameter, welche man auf der Axe ap erhält, wenn man den Flächen parallele Ebenen durch einen beliebigen Punkt auf der Axe al legt. Es ist zu beachten, dass eine zur Deckaxe senkrechte Fläche auf den Axen ap und al gleiche Parameter abschneidet, während eine der Deckaxe parallele Fläche auf der Axe ap einen Parameter aq besitzt, welcher ebenfalls gleich al, aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist; es folgt daraus, dass, wenn die erstere Fläche eine mögliche ist, die zweite es auch sein wird. Aber in diesem letzteren Falle wird die Deckaxe, als Durchschnitt zweier möglicher Flächen, gleichzeitig eine mögliche krystallographische Axe sein.

Der eben betrachtete Fall, in welchem die Deckaxe keine mögliche krystallographische Axe ist, kann nicht eintreten, wenn diese Axe eine solche von 90° oder 60° ist. In der That bedingt eine durch eine derartige Axe gehende Fläche die Existenz einer anderen, welche durch dieselbe Axe geht und mit der ersteren einen Winkel von 90° oder 60° bildet, so dass eine Deckaxe mit einem dieser beiden Winkel stets mit der Durchschnittsrichtung zweier möglicher Krystallflächen zusammenfällt.

§ 23. Im Folgenden soll nun bewiesen werden, dass *eine, zu einer Deckaxe von 90°, 60° oder einer rationalen Axe von 180° senkrechte Ebene stets einer möglichen Krystallfläche parallel ist.*

Zunächst ist daran zu erinnern, dass der Durchschnitt zweier Flächen, welche durch eine Drehung von 180° um die Deckaxe zusammenfallen, in einer zu dieser Axe [**45**] senkrechten Geraden stattfindet. Daraus folgt, dass der Durchschnitt einer zur Deckaxe geneigten Fläche mit einer zu dieser Axe senkrechten Ebene stets eine mögliche krystallographische Axe sein muss. Sobald also zwei Krystallflächen vorhanden sind, welche zur Deckaxe geneigt sind und die zu dieser Axe senkrechte Ebene in zwei verschiedenen Geraden schneiden, wird diese Ebene eine mögliche Krystallfläche sein, weil sie durch zwei mögliche krystallographische Axen geht. Es bleibt nun noch übrig zu prüfen, ob es immer zwei, in der angegebenen Art gestellte Flächen giebt. Da stets drei Flächen existiren, welche nicht derselben Geraden parallel sind, so muss es immer eine Fläche geben, welche der Deckaxe nicht parallel ist. Steht diese senkrecht zu ihr, so haben wir Nichts mehr zu beweisen; wir werden sie also zu ihr geneigt

annehmen. Ist die Deckaxe eine solche von 90° oder 60°, so schneidet eine derartige Fläche einerseits und diejenige, mit welcher sie durch eine Drehung von 90° oder 60° um die Deckaxe zusammenfällt, andererseits die zur Axe senkrechte Ebene in verschiedenen Geraden, so dass die obige Bedingung erfüllt ist. Wenn aber die Deckaxe eine solche von 180° ist, so kann es vorkommen, dass keine anderen Flächen existiren, als von einer der folgenden Kategorien: 1) eine beliebige Anzahl von Flächen, welche einer und derselben, zur Deckaxe senkrechten Geraden parallel sind, 2) ein Flächenpaar, welches nicht dieser Geraden, sondern der Deckaxe parallel ist. Es mögen wieder (Fig. 20) *ah* die Deckaxe, *al* und *ap* die Durchschnitte der durch jene gehenden Fläche mit den beiden Flächen sein, welche durch eine Drehung von 180° um die Deckaxe zusammenfallen; alsdann sind die Geraden *al* und *ap* mögliche krystallographische Axen. Da die Deckaxe *ah* ebenfalls eine solche ist, so wird die durch diese Axe und die gemeinsame Schnittrichtung der Flächen der ersten Kategorie gehende Ebene eine mögliche Krystallfläche sein. Wenn man dieser Fläche parallel durch einen beliebigen Punkt *l* auf der Axe *al* eine Ebene legt, so wird der Parameter derselben auf der Axe *ap*, d. i. *aq*, gleich und entgegengesetzt *al* sein. Da in Folge dessen die Parameter auf zwei Axen in rationalem Verhältnisse stehen, so ergiebt sich daraus, dass eine Ebene, welche der gemeinsamen Durchschnittsrichtung der Flächen der ersten Kategorie parallel ist und die Parameter *al* und $ap = al$ hat, eine mögliche Krystallfläche ist. Die beiden Geraden, durch welche wir diese Ebene gelegt haben, sind aber nun senkrecht zu der Deckaxe; also existirt immer eine mögliche Krystallfläche senkrecht zu einer Axe von 180°, welche eine mögliche krystallographische Axe ist.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, dass in dem Falle einer irrationalen Axe von 180° eine zu derselben senkrechte Ebene keine mögliche Krystallfläche ist.

[46] § 24. *Wenn eine Deckaxe von 90° oder 60° oder eine rationale Axe von 180° vorhanden ist, so sind zwei mögliche krystallographische Axen, welche durch eine Drehung von 180° um die Deckaxe zusammenfallen, gleichwerthig.*

Wir nennen zwei krystallographische Axen *gleichwerthig*, wenn die Parameter auf der einen dieser Axen in rationalem Verhältnisse zu den Parametern auf der anderen stehen. Es

sei *ah* (Fig. 20) eine Deckaxe von 180°, 90° oder 60° und *al* eine mögliche krystallographische Axe. Offenbar ist dann auch die Gerade *ap*, mit welcher *al* durch eine Drehung von 180° um die Axe *ah* zusammenfällt, eine mögliche krystallographische Axe. Da *ah* ebenfalls eine solche ist, so giebt es eine mögliche Fläche, welche die Zeichnungsebene in der Geraden *ah* schneidet; die Parameter *al* und *aq* dieser Fläche auf den Axen *al* und *ap* sind gleich, wodurch die Gleichwerthigkeit dieser Axen bewiesen ist.

§ 25. *Senkrecht zu einer Deckaxe von 60° oder 90° existirt stets eine mögliche krystallographische Axe, und die Gerade, mit welcher diese durch eine Drehung von 60° oder 90° um die Deckaxe zusammenfällt, ist eine, mit ihr gleichwerthige, mögliche krystallographische Axe.*

Wir haben weiter oben gesehen, dass die zu einer Axe von 60° oder 90° senkrechte Ebene immer eine mögliche Fläche ist; der Durchschnitt dieser Ebene mit irgend einer anderen Fläche ist daher eine mögliche krystallographische Axe, welche mit der Deckaxe einen rechten Winkel einschliesst. Durch eine Drehung von 60° oder 90° gelangt diese Axe mit einer anderen Geraden zur Deckung, welche ebenfalls eine mögliche krystallographische Axe sein muss, weil in derselben die zur Deckaxe senkrechte Ebene und diejenige Fläche, mit welcher die vorher erwähnte durch eine Drehung von 60° oder 90° um die Deckaxe zusammenfällt, einander schneiden. Es bleibt jetzt noch übrig, zu beweisen, dass diese beiden Axen gleichwerthig sind. Sei *A* (Fig. 21) eine Deckaxe von 60° oder 90°, welche wir uns senkrecht zur Zeichnungsebene vorstellen wollen, *Ab* eine zu ihr senkrechte, mögliche krystallographische Axe, und *Ac* eine zweite, mit welcher die erste durch eine Drehung von 60° oder 90° um die Deckaxe zusammenfällt. Wenn die Axe eine solche von 60° ist, bietet der Beweis unseres Satzes keine Schwierigkeit dar, weil alsdann eine dritte krystallographische Axe *Ad* existirt, nämlich die Gerade, mit welcher *Ac* zur Deckung gelangt durch eine Drehung von 60° um die Deckaxe in demselben Sinne, wie die Drehung, welche *Ab* in *Ac* überführt. In Folge dessen ist die Ebene durch *A* und die Gerade *Ad* eine mögliche Krystallfläche; die Parameter dieser

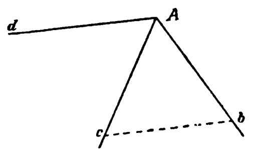


Fig. 21.

Fläche auf den Axen *Ab* und *Ac* sind aber gleich, folglich besitzen diese Axen denselben Werth.

[47] Für eine Deckaxe von 90° gilt unser Satz nothwendig nur in dem Falle, dass eine zu dieser Axe geneigte Fläche existirt. Die Axe von 90° ist nun offenbar selbst eine mögliche krystallographische Axe; legen wir durch irgend einen Punkt auf dieser Axe eine Ebene parallel der soeben erwähnten geneigten Fläche und eine zweite, mit welcher die erstere durch eine Drehung von 90° um die Deckaxe zusammenfällt. Die erste Ebene schneidet nothwendig eine der beiden Axen *Ab* oder *Ac*, die zweite dagegen die andere in einem Punkte, welcher gleichweit von der Mitte der Kugelfläche entfernt ist; hieraus folgt aber, dass die Axen *Ab* und *Ac* gleichwerthig sind.

§ 26. In dem Falle, dass nicht eine einzige zur Deckaxe von 90° geneigte Fläche existirt, sind nur Flächen parallel dieser Axe und ein zu ihr senkrechtes Flächenpaar möglich. Alle möglichen krystallographischen Axen liegen alsdann in der zur Deckaxe senkrechten Ebene, während es auf dieser Axe nur zwei mögliche Parameter giebt, von denen einer beliebig, der andere unendlich ist. Eine entsprechende Anordnung der Flächen bot sich uns weiter oben in einem anderen Falle dar, nämlich in demjenigen einer irrationalen Axe von 180°; auch da hatten wir eine unbestimmte Anzahl von Flächen, welche eine Zone bilden, und ausser dieser Zone ein einziges Paar paralleler Flächen. Ebenso lagen auch in diesem Falle alle krystallographischen Axen in der diesem Flächenpaare parallelen Ebene, und die ausserhalb dieser Ebene sich befindende Zonenaxe ist keine krystallographische Axe im eigentlichen Sinne des Wortes, weil auf derselben nur zwei mögliche Parameter existiren, ein beliebiger und ein unendlicher. Ausser diesen beiden Flächencomplexen, von denen aus unseren Betrachtungen hervorgeht, dass sie Ausnahmen von den gewöhnlichen Eigenschaften der Deckaxen von 90° und 180° darbieten, kann man sich mehrere analoge Systeme vorstellen, welche durch die Eigenthümlichkeit bestimmt werden, dass ausser einer beliebigen Anzahl in einer Ebene liegender, krystallographischer Axen lediglich eine einzige Axe existirt, auf welcher man nur zwei Parameter, einen beliebigen und einen unendlichen, annehmen kann. So kann man sich z. B. eine Zone denken, deren Flächen einer Axe von 180°, 60° oder 120° parallel sind, und ein zu dieser Axe

senkrechtes Flächenpaar; ferner in dem Falle dreier, zu einander senkrechter Axen von 180° eine Zone, deren Flächen einer dieser Axen parallel sind, und ein den beiden anderen Axen von 180° paralleles Flächenpaar; endlich kann man sich, im Falle, dass keine Deckaxe vorhanden ist, eine Zone vorstellen, deren Flächen einer beliebigen Geraden parallel sind, und ein Paar paralleler Flächen von beliebiger Stellung, welche jener Zone nicht angehören. In allen diesen Fällen gilt das Gesetz der Rationalität der [48] Parameterverhältnisse nur theilweise, denn da es auf einer dieser Axen keinen bestimmten Parameter giebt, handelt es sich hier nicht um drei, nicht in einer Ebene liegende, krystallographische Axen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Parameter auf einer jeden derselben in einem rationalen Verhältnisse zu einem bestimmten Parameter auf dieser Axe stehen. Keiner dieser Fälle existirt in der Natur, woraus zu schliessen ist, dass in jeder Krystallreihe, welche die Natur uns darbietet, es immer drei mögliche krystallographische Axen giebt, deren jede einen bestimmten, von 0 und ∞ verschiedenen Parameter besitzt. Dieses ist nur möglich, wenn in der Natur ein allgemeines, alle Krystallformen umfassendes Gesetz existirt, welches man folgendermaassen ausdrücken kann:

In jeder Krystallreihe giebt es stets vier Flächen, welche den Flächen irgend eines Tetraëders parallel sind.

§ 27. Durch die Aufstellung des eben auseinandergesetzten Principes verschwinden die Ausnahmen von den Sätzen der §§ 22, 23, 24 und 25, welche im Vorhergehenden besprochen wurden, und man kann allgemein schliessen:

1) *Jede Deckaxe von 180°, 90° oder 60° ist gleichzeitig eine mögliche krystallographische Axe.*

2) *Zwei mögliche krystallographische Axen, welche durch eine Drehung von 180° um eine Deckaxe von 180° vertauscht werden, sind gleichwerthig.*

3) *Die zu einer Deckaxe von 180°, 90° oder 60° senkrechte Ebene ist stets eine mögliche Krystallfläche*, und

4) *Senkrecht zu einer Deckaxe von 90° oder 60° existirt immer eine mögliche krystallographische Axe, und die Gerade, mit welcher diese durch eine Drehung von 90° oder 60° um die Deckaxe zusammenfällt, ist eine ihr gleichwerthige krystallographische Axe.*

§ 28. Die Deckaxen von 120° unterscheiden sich von denjenigen anderer Art dadurch, dass sie nicht nothwendig

mögliche krystallographische Axen sind. Um die Eigenschaften dieser Axen zu untersuchen, denken wir uns eine zu einer Deckaxe von 120° geneigte Krystallfläche und zwei andere Flächen, mit denen die erstere durch Drehungen von 120° um die Deckaxe zusammenfällt. Die Geraden, in welchen diese drei Flächen einander schneiden, sind mögliche krystallographische Axen, welche gleiche Winkel mit einander bilden und zur Deckaxe gleich geneigt sind; [49] diese Axen sollen mit A, B und C bezeichnet werden. Auf ihnen schneide eine Krystallfläche die Parameter a, b und c ab. Eine Drehung von 120° um die Deckaxe lässt diese Fläche mit einer anderen zusammenfallen, welche auf denselben Axen A, B und C die Parameter b, c und a hat, und eine zweite, gleich grosse Drehung in demselben Sinne führt sie in die Stellung einer dritten Fläche über, deren Parameter auf denselben Axen c, a und b sind. Um die Parameterverhältnisse auf ihre Rationalität zu prüfen, denkt man sich die beiden letzteren Flächen sich selbst parallel so verschoben, dass alle drei Flächen auf der Axe A den gleichen Parameter a haben. Eine solche Verschiebung ändert alle Parameter einer Fläche in demselben Verhältnisse, und zwar ist dieses Verhältniss $\frac{a}{b}$ bei der zweiten Fläche, $\frac{a}{c}$ bei der dritten. Nach der Verschiebung sind also die Parameter der drei Flächen:

$$\begin{array}{lllll} \text{auf der Axe } A: & a, & a, & a, \\ \text{- - -} \quad B: & b, & \frac{ac}{b}, & \frac{a^2}{c} \\ \text{- - -} \quad C: & c, & \frac{a^2}{b}, & \frac{ab}{c}. \end{array}$$

Damit diese Flächen möglich sind, müssen die Verhältnisse ihrer Parameter auf jeder Axe, d. h. die Grössen $\frac{b^2}{ac}$, $\frac{a^2}{bc}$ und $\frac{c^2}{ab}$ rationale Werthe besitzen. Es folgt hieraus auch die Rationalität des Verhältnisses $\frac{a^3}{b^3}$. Setzt man:

$$\frac{a^3}{b^3} = \varrho, \quad \frac{b^2}{ac} = \varrho_1,$$

wo ϱ und ϱ_1 rationale Grössen sind, so hat man:

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{\varrho}, \quad \frac{b}{c} = \varrho_1 \sqrt[3]{\varrho}, \quad \frac{a}{c} = \varrho_1 \sqrt[3]{\varrho^2}.$$

§ 29. Es sind nun zwei verschiedene Fälle zu berücksichtigen, der eine, in welchem $\varrho = 1$ oder der dritten Potenz einer rationalen Zahl, und der andere, wenn $\sqrt[3]{\varrho}$ eine irrationale Zahl ist. Im ersteren Falle sind die Verhältnisse zwischen a, b und c rational, und alsdann *ist die Deckaxe von 120° eine mögliche krystallographische Axe*, wie aus dem Folgenden hervorgeht. Da der Parameter a zu den Parametern b und c in einem rationalen Verhältnisse steht, so ist stets eine Fläche möglich, welche auf den drei Axen A, B und C den gleichen Parameter a abschneidet. Es seien in Fig. 22 OA, OB und OC diese drei Axen und ABC die Fläche, welche auf allen dreien gleiche Parameter besitzt. Nimmt man als Coordinatenaxen BA, BO und BC, so hat die Fläche AOC auf diesen Axen die Parameter BA, BO und BC, [50] und hieraus ergiebt sich die Möglichkeit der Flächen AOD und COE, welche auf diesen Axen die Parameter BA, BO, $\frac{1}{2} BC$ resp. BC, BO, $\frac{1}{2} BA$ haben. Nun schneiden aber diese beiden Ebenen einander in der Axe von 120°, welche folglich eine mögliche krystallographische Axe ist. Hierzu mag noch bemerkt werden, dass die Durchschnitte dieser Ebenen mit der Fläche ABC, welche zur Deckaxe senkrecht ist, zwei Gerade AD und CE sind, die mit einander 60° bilden, und dass diese beiden Geraden mögliche krystallographische Axen sind. Da ausserdem der Fusspunkt F der Deckaxe der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreieckes ABC ist, so dass $FD = FE$, so ergiebt sich, dass die beiden Axen FE und FD gleichwerthig sind. Endlich ist leicht einzusehen, dass die Gerade durch die Punkte B und F ebenfalls eine mögliche krystallographische Axe ist, welche mit FD und FE einen Winkel von 60° bildet und beiden gleichwerthig ist.

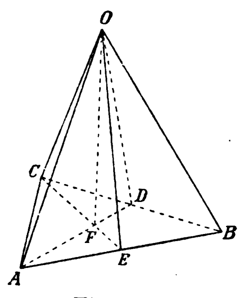


Fig. 22.

Der umgekehrte Satz: *Wenn eine Deckaxe von 120° gleichzeitig eine mögliche krystallographische Axe ist, so sind drei krystallographische Axen A, B und C, welche durch Drehungen von 120° um die Deckaxe zusammen-*

fallen, *gleichwerthig* — wird in folgender Weise bewiesen: Denken wir uns irgend eine Krystallfläche, welche die Axe von 120° in einem vom Ursprunge der Coordinaten verschiedenen Punkte schneidet. Diese Fläche gelangt durch Drehungen von 120° um die Deckaxe in die Stellung zweier anderer Flächen, welche durch denselben Punkt einer krystallographischen Axe, nämlich der Axe von 120°, gehen und auf den Axen B und C den gleichen Parameter haben, wie die erste Fläche auf der Axe A. Daraus folgt aber die Gleichwerthigkeit der Axen A, B und C.

§ 30. Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass, wenn ϱ nicht die dritte Potenz einer rationalen Zahl ist, d. h. wenn die Axen A, B und C nicht gleichwerthig sind, alsdann die Deckaxe von 120° keine mögliche krystallographische Axe ist. Ebenso evident ist das Umgekehrte. In der Natur giebt es keine Krystallformen, welche derartige Axen von 120° zeigen, oder wenigstens sind sie noch nicht entdeckt. Im Gegentheil würde die Existenz solcher Axen von 120° mit einem bis jetzt ausnahmslos beobachteten krystallographischen Gesetze unverträglich sein, nämlich mit dem Gesetze, dass die Tangenten der Winkel zwischen den Flächen einer Zone in rationalen Verhältnissen stehen. In der That ist die Existenz dieses Gesetzes gebunden an die Rationalität der Verhältnisse zwischen den Producten aus zwei Parametern, jeder auf einer der Coordinatenaxen, aus den Sinus der Winkel, welchen diese Axen mit der dritten bilden, und aus dem Cosinus des Winkels, welchen die in der dritten Axe einander schneidenden Coordinatenebenen einschliessen. Da die Winkel zwischen den Axen A, B und C gleich sind, [51] und die Winkel zwischen den in einer jeden dieser Axen einander schneidenden Coordinatenebenen ebenfalls einander gleich sind, so folgt daraus, dass das Verhältniss zwischen zwei Producten der vorher angegebenen Art sich auf das Verhältniss zwischen zwei Parametern, deren jeder auf einer der Axen A, B und C genommen ist, reducirt. Die Rationalität eines solchen Verhältnisses schliesst aber die Existenz von Deckaxen von 120° der fraglichen Art aus.

§ 31. Es sollen nunmehr die im Kapitel IV aufgezählten krystallographischen Gruppen betrachtet werden, um zu sehen, ob nothwendig in einer jeden derselben mögliche krystallographische Axen von der Art, wie man sie allgemein in der Krystallographie voraussetzt, vorhanden sind.

A. Die Gruppen des regulären Systems.

1) und 2) Fig. 28 und 27. In diesen beiden Gruppen, elche der Holoëdrie und der Hemiëdrie mit abwechselnden lächen entsprechen, giebt es drei auf einander senkrechte xen von 90°. Dieselben sind nothwendig mögliche krystallo-raphische Axen von gleichem Werthe (§ 27, Nr. 1 und 4).

3) Fig. 31. In dieser, der tetraëdrischen Hemiëdrie ent-prechenden Gruppe halbiren die Normalen der Symmetrie-benen die Winkel zwischen den Axen von 180°. Aus der nmerkung des § 13 ist bekannt, dass in Bezug auf die bsoluten Werthe der Parameter diese Normalen dieselbe Rolle pielen, wie Deckaxen von 180°, woraus sich die Gleich-erthigkeit der in dieser Gruppe vorhandenen Axen von 180°, elche ebenfalls mögliche krystallographische Axen sind, er-iebt, weil dieselben durch Drehungen von 180° um die Nor-nalen der Symmetrieebenen vertauscht werden (§ 27, Nr. 2).

4) und 5) Fig. 30 und 29. In diesen Gruppen, welche er dodekaëdrischen Hemiëdrie und der Tetartoëdrie ent-prechen, sind die drei Axen von 180° zugleich orthogonale rystallographische Axen, gleichwerthig aber nur dann, wenn ie Axen von 120° ebenfalls mögliche krystallographische Axen ind (§ 29). In letzterem Falle sind diese Gruppen identisch nit denen, welche man gewöhnlich unter dem Namen der odekaëdrischen Hemiëdrie und der Tetartoëdrie des regulären ystems bezeichnet. Sind aber die Axen von 120° keine nöglichen krystallographischen Axen, so sind die drei ortho-onalen Axen ungleichwerthig, und die Parameter auf den-elben stehen in irrationalen Verhältnissen. In diesem Falle ind ausser den allgemeinen Formen dieser Gruppen keine nderen möglich, als das Pentagondodekaëder [52] und der Würfel, während alle anderen Formen, welche durch die Gleichheit der Parameter auf zwei Axen entstehen, unmöglich ind (s. § 30).

B. Die Gruppen des tetragonalen Systems.

1) und 2) Fig. 33 und 32. In diesen Gruppen, welche er Holoëdrie und der trapezoëdrischen Hemiëdrie entsprechen, ind sowohl die Axe von 90°, als die dazu senkrechten Axen on 180° mögliche krystallographische Axen; von den letzte-en sind die auf einander senkrechten gleichwerthig (§ 27, Nr. 1 und 4).

3) Fig. 40. In dieser, der sphenoidischen Hemiëdrie entsprechenden Gruppe sind die drei Axen von 180° zugleich orthogonale krystallographische Axen. Zwei derselben sind gleichwerthig, weil die Winkel zwischen ihnen durch die Normalen der Symmetrieebenen, welche, wie oben bemerkt, in gewisser Beziehung die Rolle von Deckaxen von 180° spielen, halbirt werden (§ 27, Nr. 1 und 2).

4) und 7) Fig. 36 und 35. In diesen Gruppen, welche der pyramidalen Hemiëdrie und deren Hemimorphie entsprechen, ist die Axe von 90° eine krystallographische, und nach § 27, Nr. 4 existiren noch zwei andere krystallographische Axen senkrecht zu ihr und zu einander. Diese Axen können parallel den horizontalen Kanten irgend einer Pyramide oder parallel den Diagonalen der Basis einer solchen gewählt werden; im ersteren Falle wird diese Pyramide eine solche zweiter Ordnung, im zweiten Falle eine solche erster Ordnung.

5) Fig. 34. Die allgemeine Form dieser Gruppe, der sphenoidischen Tetartoëdrie, besitzt vier, den Flächen einer regelmässigen quadratischen Pyramide parallele Flächen, so dass die Axe der sphenoidischen Hemiëdrie in Bezug auf die absoluten Werthe der Parameter dieselbe Rolle spielt, wie eine Deckaxe von 90°. Daraus folgt, dass sie eine krystallographische Axe ist, und dass es noch zwei andere krystallographische Axen, senkrecht zu ihr und zu einander, giebt. Diese letzteren können gewählt werden parallel den Durchschnitten eines beliebigen Sphenoids mit einer zur Axe der sphenoidischen Symmetrie senkrechten Ebene, oder parallel den Geraden, welche die Winkel jener Schnittlinien halbiren. Im ersteren Falle wird das gewählte Sphenoid ein solches zweiter Ordnung, im zweiten ein solches erster Ordnung.

6) Fig. 37. In dieser Gruppe, welche der Hemimorphie der Holoëdrie entspricht, ist die Deckaxe eine krystallographische Axe, ebenso die Normalen der Symmetrieebenen, welche alle in einer zur ersten Axe [53] senkrechten Ebene gelegen sind; diese Axen bilden zwei Paare, deren jedes aus zwei, auf einander senkrechten, gleichwerthigen Axen besteht.

C. Die Gruppen des hexagonalen Systems.

1), 2), 4), 9) und 10) Fig. 45, 44, 51, 52 und 50. In diesen Gruppen, welche der Holoëdrie, der trapezoëdrischen und der pyramidalen Hemiëdrie und den Hemimorphien dieser

drei Abtheilungen entsprechen, ist die Axe von 60° eine krystallographische Axe, deren es noch drei andere giebt, welche zu ihr senkrecht sind, mit einander Winkel von 60° bilden und alle drei den gleichen Werth besitzen (§ 27, Nr. 1 und 4). Damit die horizontalen Axen diejenige Anordnung erhalten, welche Naumann ihnen gegeben hat, muss man als solche annehmen in den beiden ersten Gruppen die abwechselnden Axen von 180°, in der holoëdrischen Hemimorphie die Normalen zu den abwechselnden Symmetrieebenen, und in der pyramidalen Hemiëdrie und deren Hemimorphie diejenigen Geraden, welche parallel oder senkrecht sind zu den horizontalen Kanten einer beliebigen hexagonalen Pyramide; wählt man die ersteren, so wird diese Pyramide eine solche erster Ordnung, anderenfalls eine solche zweiter Ordnung.

3), 5) und 7) Fig. 48, 49 und 47. In diesen Gruppen, welche der rhomboëdrischen und der trigonotypen Hemiëdrie und der trapezoëdrischen Tetartoëdrie entsprechen, ist die Ebene, welche durch die Axen von 180° geht, eine mögliche Krystallfläche (§ 27, Nr. 1), und da diese Fläche senkrecht zur Axe von 120°, so ist die letztere eine mögliche krystallographische Axe (§ 29), und die Axen von 180° sind gleichwerthige krystallographische Axen.

11) Fig. 55. In Folge der Analogie der Normalen von Symmetrieebenen mit Axen von 180° gilt das von den drei vorhergehenden Gruppen Gesagte auch für die vorliegende, welche der Hemimorphie der rhomboëdrischen und der trigonotypen Hemiëdrie entspricht.

8) Fig. 54. In dieser, der pyramidalen Tetartoëdrie entsprechenden Gruppe fällt die Normale zur Symmetrieebene mit der Axe von 120° zusammen. Da aber diese Normale, in Folge ihrer Analogie mit einer Axe von 180°, eine mögliche krystallographische Axe ist, so liegt hier der Fall einer Axe von 120°, welche zugleich krystallographische Axe ist, vor, und es giebt daher (§ 29) noch drei zu ihr senkrechte krystallographische Axen, welche unter einander Winkel von 60° bilden und den gleichen Werth besitzen. Wählt man diese Axen, wie es in § 29 geschah, senkrecht zu den Schnittrichtungen der Flächen einer beliebigen trigonalen Pyramide mit der zur Axe von 120° senkrechten Ebene, so wird diese Pyramide eine solche zweiter Ordnung, während sie [**54**] erster Ordnung wird, wenn man diese Axen den erwähnten Schnittrichtungen parallel wählt.

6) und 12) Fig. 56 und 53. In diesen Gruppen, welche der rhomboëdrischen Tetartoëdrie und deren Hemimorphie entsprechen, ist die Axe von 120° nicht nothwendig eine mögliche krystallographische Axe, so dass in diesen Gruppen das System von Coordinatenaxen, welches man gewöhnlich für das hexagonale Krystallsystem als charakteristisch betrachtet, nicht nothwendig vorhanden zu sein braucht. Ist die Axe von 120° eine mögliche krystallographische Axe, so existirt dieses System von Coordinatenaxen in den vorliegenden Gruppen, und dieselben sind alsdann identisch mit der rhomboëdrischen Tetartoëdrie und deren Hemimorphie, wie sie in der Krystallographie aufgestellt worden sind. Wenn dagegen die Axe von 120° keine mögliche krystallographische Axe ist, so giebt es auch keine krystallographischen Axen senkrecht zu derselben, und von den Krystallformen werden die Prismen und die Pinakoide unmöglich, so dass das Rhomboëder oder in der Hemimorphie dessen Hälfte die einzige mögliche Form sein wird, welche nicht einmal mit dem complementären Rhomboëder combinirt sein kann.

D. Die Gruppen des rhombischen Systems.

1), 2) und 3) Fig. 39, 38 und 43. In diesen Gruppen, welche der Holoëdrie, der sphenoidischen Hemiëdrie und der Hemimorphie entsprechen, sind sowohl die Axen von 180°, als die Normalen zu den Symmetrieebenen orthogonale krystallographische Axen. Im Allgemeinen haben diese Axen verschiedenen Werth, zufällig können aber zwei Axen oder auch alle drei den gleichen Werth annehmen.

E. Die Gruppen des monoklinen Systems.

1), 2) und 3) Fig. 42, 46 und 41. In diesen, der Holoëdrie, der Hemiëdrie und der Hemimorphie entsprechenden Gruppen ist die Axe von 180° oder die Normale zur Symmetrieebene eine krystallographische Axe (die Orthodiagonale), und da die zu dieser Axe senkrechte Ebene stets eine mögliche Fläche ist (§ 27, Nr. 3), so werden die beiden anderen krystallographischen Axen durch die Schnittrichtungen dieser Ebene mit irgend zwei anderen Krystallflächen, welche diese Ebene nicht in derselben Geraden schneiden, bestimmt. Diese Axen (die Hauptaxe und die Klinodiagonale) sind daher nothwendig senkrecht zur Orthodiagonale, während sie unter einander einen im Allgemeinen schiefen Winkel bilden, welcher aber auch zufällig ein rechter sein könnte.

[55] F. Die Gruppen des triklinen Systems.

1) und 2) Fig. 57 und 58. In diesen Gruppen, welche der Holoëdrie und der Hemiëdrie entsprechen, wählt man als Coordinatenaxen die Durchschnitte dreier beliebiger möglicher Krystallflächen, welche nicht derselben Geraden parallel sind. Es kann vorkommen, dass zwei der gewählten Flächen zu einander senkrecht sind, oder auch, dass die Axen orthogonale sind. Wenn das Gesetz, dass die Tangenten der Winkel zwischen den Flächen einer Zone in rationalen Verhältnissen zu einander stehen, allgemein angenommen werden soll, so kann man bekanntlich in jeder Krystallreihe stets die Axen so wählen, dass sie einen oder den anderen der eben erwähnten Fälle von Rechtwinkeligkeit darbieten.

§ 32. Im Vorhergehenden ist also nachgewiesen worden, dass im Allgemeinen in allen von uns aufgestellten Gruppen mögliche krystallographische Axen existiren, welche ebenso angeordnet und in denselben Fällen gleichwerthig sind, wie man es in der Krystallographie allgemein voraussetzt. Nur einige, durch die Gegenwart von Deckaxen von 120° charakterisirte Gruppen machen von dieser Regel eine Ausnahme. Es sind dies die folgenden: die dodekaëdrische Hemiëdrie (Fig. 30) und die Tetartoëdrie (Fig. 29) des regulären Systems, die rhomboëdrische Tetartoëdrie (Fig. 56) und die Hemimorphie der Tetartoëdrien (Fig. 53) des hexagonalen Systems. In diesen Gruppen existiren solche Axen, wie man sie allgemein voraussetzt, nur für den Fall, dass die Axen von 120° mögliche krystallographische Axen sind, und dieses findet immer statt, wenn das Gesetz der Rationalität der Tangentenverhältnisse der Winkel zwischen den Flächen derselben Zone allgemein angenommen werden soll. Sind dagegen die Axen von 120° keine möglichen krystallographischen Axen, so giebt es in den beiden genannten Gruppen des regulären Systems zwar immer drei orthogonale Axen, aber dieselben sind nicht gleichwerthig, während in den beiden zuletzt erwähnten Gruppen die gewöhnliche Anordnung der Axen des hexagonalen Systems, so wie sie Naumann adoptirt hat, nicht möglich ist, sondern drei Axen existiren, welche so angeordnet sind, wie die von Miller für das hexagonale System angenommenen, die aber nicht gleichwerthig sind.

Kapitel VI.

Angabe der einfachen Formen einiger krystallographischer Gruppen.

§ 33. Nach dem allgemeinen Ueberblick der Gruppen, welcher in Kapitel IV gegeben wurde, bleibt es noch übrig, in einige weitere Details [56] über diejenigen Gruppen einzutreten, deren einfache Formen, wie es scheint, nirgends Gegenstand einer vollständigen Behandlung gewesen sind. Um die Beziehungen der hemimorphen Gruppen zu den übrigen besser hervortreten zu lassen, sollen in diesem Kapitel sämmtliche Hemimorphien betrachtet werden. Die geeignetste Methode, um den Zusammenhang zwischen den Formen der verschiedenen Gruppen eines und desselben Systems zu übersehen, scheint uns die Ableitung der einfachen Formen der verschiedenen Hemiëdrien, Hemimorphien und Tetartoëdrien von den entsprechenden Formen der Holoëdrien; diese Methode soll daher befolgt werden.

B. Das tetragonale System.

6) Fig. 37. *Die Hemimorphie der holoëdrischen Formen.* Von den einfachen holoëdrischen Formen bewahren die Pyramiden und das Pinakoid nur die Hälfte ihrer Flächen, nämlich diejenigen, welche gegen das eine Ende der Axe von 90° convergiren. Die Prismen der Holoëdrie bleiben in Bezug auf die Anzahl der Flächen unverändert.

7) Fig. 35. *Die Hemimorphie der pyramidalen und der trapezoëdrischen Hemiëdrie.* Man erhält die allgemeine Form dieser Gruppe, indem man von der allgemeinen Form der vorigen Gruppe nur die abwechselnden Flächen beibehält, und die so sich ergebende allgemeine Form liefert die übrigen Formen als specielle Fälle. Ebenso kann man die einfachen Formen dieser Gruppe erhalten, indem man von jeder der einfachen Formen der pyramidalen oder der trapezoëdrischen Hemiëdrie diejenigen Flächen weglässt, welche die eine Seite der Axe von 90° schneiden. Auf diese Art liefert die holoëdrische ditetragonale Pyramide eine halbe tetragonale Pyramide dritter Ordnung, die quadratischen Pyramiden erster und zweiter Ordnung geben die Hälften solcher, das Pinakoid bleibt nur mit einer einzigen Fläche erhalten, das ditetragonale Prisma giebt ein quadratisches Prisma dritter Ordnung,

während die Prismen erster und zweiter Ordnung unverändert bleiben.

C. Das hexagonale System.

8) Fig. 54. *Die pyramidale Tetartoëdrie.* Man erhält die allgemeine Form dieser Tetartoëdrie, indem man von einer dihexagonalen Pyramide in den abwechselnden Sectoren von 60° nur je zwei Flächen, entweder die rechten, oder die linken, behält. Die anderen Formen ergeben sich als specielle Fälle der allgemeinen Form in derselben Weise, wie in der Holoëdrie. Nach diesem Gesetze zerfällt also die dihexagonale Pyramide in vier [57] trigonale Pyramiden der dritten Ordnung, die hexagonale Pyramide erster Ordnung in zwei trigonale Pyramiden erster Ordnung, die hexagonale Pyramide zweiter Ordnung in zwei trigonale Pyramiden zweiter Ordnung, das dihexagonale Prisma in vier trigonale Prismen dritter Ordnung, das hexagonale Prisma erster Ordnung in zwei trigonale Prismen erster Ordnung, das hexagonale Prisma zweiter Ordnung in zwei trigonale Prismen zweiter Ordnung, während das Pinakoid unverändert bleibt. Es haben also in dieser Gruppe alle Pyramiden und Prismen als Basis ein gleichseitiges Dreieck.

9) Fig. 52. *Die Hemimorphie der holoëdrischen Formen.* Diese Hemimorphie bietet denselben Charakter dar, wie die entsprechende Hemimorphie im tetragonalen System. Jede der holoëdrischen Pyramiden zerfällt in zwei Hälften, das Pinakoid in zwei Hemipinakoide, während sämmtliche Prismen ihre volle Flächenzahl bewahren.

10) Fig. 50. *Die Hemimorphie der trapezoëdrischen und der pyramidalen Hemiëdrie* zeigt ebenfalls den gleichen Charakter, wie die entsprechende Hemimorphie im tetragonalen System, so dass man also Hälften von hexagonalen Pyramiden erster, zweiter und dritter Ordnung hat, ferner hexagonale Prismen erster, zweiter und dritter Ordnung, endlich die Hemipinakoide.

11) Fig. 55. *Die Hemimorphie der rhomboëdrischen und der trigonotypen Hemiëdrie.* Man erhält die einfachen Formen dieser Hemimorphie, indem man in der allgemeinen Form der entsprechenden Hemiëdrien die Flächen weglässt, welche die eine Seite der Axe von 120° schneiden, und indem man die anderen einfachen Formen als specielle Fälle aus der allgemeinen ableitet. Auf diese Art verwandeln sich

die Formen der rhomboëdrischen Hemiëdrie: das Skalenoëder in die Hälfte einer ditrigonalen Pyramide, das Rhomboëder in die einer trigonalen Pyramide erster Ordnung, die hexagonale Pyramide zweiter Ordnung in die Hälfte einer hexagonalen Pyramide zweiter Ordnung, das Pinakoid in ein Hemipinakoid, das dihexagonale Prisma in ein ditrigonales Prisma, das hexagonale Prisma erster Ordnung in ein trigonales Prisma erster Ordnung, während das hexagonale Prisma zweiter Ordnung unverändert bleibt. Geht man, um zu dieser Hemimorphie zu gelangen, von der trigonotypen Hemiëdrie aus, so muss man, um die Bezeichnungen der Pyramiden und Prismen erster und zweiter Ordnung in der oben angegebenen Weise zu erhalten, an Stelle der horizontalen Axen, welche Naumann für diese Hemiëdrie adoptirt hat, die Halbirenden der Winkel zwischen jenen als Axen nehmen.

12) Fig. 53. *Die Hemimorphie der Tetartoëdrien.* Die einfachen Formen dieser Hemimorphie erhält man, wenn man in jeder der einfachen Formen der pyramidalen Tetartoëdrie diejenigen Flächen weglässt, welche eine Seite der [58] Axe von 120° schneiden, oder ebenso, wenn man von den allgemeinen Formen der rhomboëdrischen oder trapezoëdrischen Tetartoëdrie ausgeht. Alsdann verwandeln sich die Formen der rhomboëdrischen Tetartoëdrie: die Rhomboëder erster, zweiter und dritter Ordnung in halbe trigonale Pyramiden erster, zweiter und dritter Ordnung, das Pinakoid in ein Hemipinakoid und die hexagonalen Prismen erster, zweiter und dritter Ordnung in trigonale Prismen derselben Ordnungen.

D. Das rhombische System.

3) Fig. 43. *Die Hemimorphie der holoëdrischen Formen.* Die einfachen Formen dieser Hemimorphie leiten sich von den einfachen holoëdrischen Formen ab durch Weglassung derjenigen Flächen, welche eine Seite einer Axe von 180° schneiden; und zwar muss diese Axe bei der Ableitung sämmtlicher Formen die nämliche bleiben. Nimmt man dieselbe zur Hauptaxe, so erhält man folgende Bezeichnungen der Formen: die Hälfte einer rhombischen Pyramide, das rhombische Prisma, das Hemimakrodoma und Hemibrachydoma, das basische Hemipinakoid, das vollständige Makro- und Brachypinakoid.

E. Das monokline System.

2) Fig. 46. *Die Hemiëdrie.* Man behält von der holoëdrischen Hemipyramide nur ein Flächenpaar übrig, welches in dem klinodiagonalen Schnitte eine Gerade gemeinsam hat, so dass die Hemipyramide in zwei Viertelpyramiden zerfällt. Das Hauptprisma und das Klinodoma zerfallen in gleicher Weise in zwei Hemiprismen und zwei Hemiklinodomen, das Hemiorthodoma in zwei Viertel-Orthodomen, das basische Pinakoid und das Orthopinakoid je in zwei Hemipinakoide, während das Klinopinakoid unverändert bleibt.

3) Fig. 41. *Die Hemimorphie.* Von den Flächen der holoëdrischen Hemipyramide bleiben nur die beiden, eine Seite der Axe von 180° (der Orthodiagonale) schneidenden Flächen übrig. In dieser Weise zerfällt die Hemipyramide in zwei Viertelpyramiden, das verticale Prisma in zwei Hemiprismen, das Klinodoma in zwei Hemiklinodomen, während das basische Pinakoid, das Orthopinakoid und das Hemiorthodoma ihre volle Flächenzahl bewahren.

F. Das trikline System.

2) Fig. 58. *Die Hemiëdrie.* Jede der einfachen Formen der Holoëdrie besteht nur aus einem einzigen Paare paralleler Flächen; die hemiëdrischen einfachen Formen [**59**] leiten sich von den entsprechenden holoëdrischen Formen durch Weglassung irgend einer der Flächen jedes, eine holoëdrische Form bildenden, Paares ab, so dass in der Hemiëdrie jede einfache Form nur aus einer einzigen Fläche besteht, deren Bezeichnung von ihrer Stellung zu den gewählten Axen abhängt.

Kapitel VII.

Schluss.

In den Naturwissenschaften ist der Zweck jedes Systems, einen leichten Ueberblick über die untergeordneten Einzelheiten zu liefern. Von zwei Systemen, welche diese Eigenschaft in gleichem Grade besitzen, müssen wir dasjenige vorziehen, dessen Gruppen natürlichere sind, d. h. in welchem die in dieselbe Gruppe gestellten Körper die grösste mögliche Zahl gleicher Eigenschaften darbieten. In dieser Beziehung scheint das in vorliegender Abhandlung auseinandergesetzte System

einigen Vortheil über das bis jetzt in der Krystallographie adoptirte zu besitzen. Wir erkennen als verschiedene Gruppen nur solche an, welche sich durch die Zahl und die Anordnung der gleichwerthigen Richtungen unterscheiden, und wenn das Princip, dass Richtungen, welche in gleicher Beziehung zur Form stehen, auch gleiche physikalische Eigenschaften darbieten, während die Richtungen, welche in Bezug auf die äussere Form nicht gleich angeordnet sind, auch ungleiche physikalische Eigenschaften zeigen können, ein allgemein gültiges ist, so wäre unsere Classification der Krystalle ebenso eine physikalische, wie sie eine geometrische ist. Ferner scheint es uns, dass der Ausdruck des von uns als Grundlage der Classification angenommenen Principes, welches eben kurz auseinandergesetzt wurde, keine Unbestimmtheit enthält, und dass die Einzelheiten dieser Classification nur eine rein mathematische Entwickelung bilden, welche lediglich nothwendige Consequenzen dieses Principes und des Gesetzes der Rationalität der Parameterverhältnisse auf jeder krystallographischen Axe darbietet. Ich gestehe, dass das auseinandergesetzte System nur das Resultat eines fortwährenden Kampfes ist, in welchen ich seit meinen ersten krystallographischen Studien verwickelt war gegenüber dem Mangel an Präcision in den Ideen, die ich den krystallographischen Werken über Alles, was sich auf das Princip der Classification bezieht, entnehmen konnte*). Unsere Untersuchungen haben zu [60] einem Resultate geführt, welches etwas von der, bis heutigen Tages von den Krystallographen angenommenen Classification, wie wir sie von Naumann auseinandergesetzt finden, abweicht. Wir haben als neue Gruppen die folgenden angegeben: zwei Hemimorphien des tetragonalen Systems, die pyramidale Tetartoëdrie und die Hemimorphien der pyramidalen Hemiëdrie und der Tetartoëdrie des hexagonalen Systems, die symmetrische Hemiëdrie des monoklinen Systems und die Hemiëdrie des triklinen Systems, während wir gleichzeitig die Existenz der folgenden, von Naumann adoptirten, Gruppen für unmöglich erklären müssen: die rhombotype Hemiëdrie und Tetartoëdrie, die Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie und

*) Ich muss an dieser Stelle anerkennen, dass der erste Anstoss dazu, die vorliegende Arbeit zu unternehmen, mir durch eine Bemerkung über die Symmetrieebenen gegeben wurde, welche mein früherer Schüler, Herr N. *Fedoroff*, Director des chemischen Laboratoriums der Artillerieakademie, machte.

die von G. Rose aufgestellte Meroëdrie des tetragonalen Systems, die monokline Meroëdrie und die Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie des rhombischen Systems — und endlich das dikline Krystallsystem. Was die von uns aufgestellten neuen Gruppen betrifft, so glauben wir im Vorhergehenden genügende Erklärungen derselben gegeben zu haben, aber es bleibt jetzt noch übrig, einige Bemerkungen über die oben genannten Gruppen, deren Existenz wir leugnen, hinzuzufügen. Da diese Gruppen nicht als besondere in unserer Classification enthalten sind, so ist es klar, dass die zu ihnen gehörigen Krystalle mit gewissen Gruppen unserer Classification in der Zahl und Anordnung ihrer gleichwerthigen Richtungen übereinstimmen müssen. Es ist also nun unsere Aufgabe, zu prüfen, durch welche Eigenthümlichkeiten sich diese Krystalle von den Gruppen, in die wir sie stellen, unterscheiden, Eigenthümlichkeiten, auf Grund deren die Krystallographen aus ihnen besondere Gruppen gebildet und sie in andere Krystallsysteme, als wir, gestellt haben. Betrachten wir jede Gruppe besonders. Naumann's rhombotype Hemiëdrie des tetragonalen Systems unterscheidet sich von den holoëdrischen Formen des rhombischen Systems nur durch den Umstand, dass die Fundamentalparameter auf zwei Axen gleich sind oder in einfachem rationalem Verhältniss stehen. Man fragt sich: welche Bedeutung hat eine Eigenthümlichkeit dieser Art, wenn sie nicht mit anderen Eigenschaften der Krystalle verbunden ist? Zwischen der fraglichen Gruppe und der Holoëdrie des rhombischen Systems existirt kein Unterschied in der Anordnung der Flächen; sollte es einen solchen in den physikalischen Eigenschaften geben? Da die Zahl und die Anordnung der gleichwerthigen Richtungen dieselbe ist, liegt kein Grund vor, eine Differenz im Charakter der physikalischen Eigenschaften zu erwarten, und da ausserdem eine solche Differenz durch die Erfahrung nicht angezeigt ist, was berechtigt dann noch zur Einreihung dieser Krystalle in das tetragonale System? Wenn man annimmt, dass das Verhältniss der Fundamentalparameter auf zwei verschiedenen Axen jeden anderen Werth haben kann, warum sollte man einen einfachen rationalen Werth ausschliessen? Und was ist schliesslich ein *einfacher* rationaler Werth, und kann man von demselben eine strenge Definition geben? Alles über diese Hemiëdrie soeben Gesagte [61] lässt sich Wort für Wort auf die Vergleichung von Naumann's rhombotyper Tetartoëdrie

des tetragonalen Systems mit der sphenoidischen Hemiëdrie des rhombischen Systems anwenden, von welcher sich jene weder durch die Anordnung der Flächen, noch durch diejenige der gleichwerthigen Richtungen unterscheidet. Dieselben Bemerkungen gelten ebenso für die Vergleichung von Naumann's Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie des tetragonalen Systems mit der Hemimorphie der holoëdrischen Formen des rhombischen Systems, mit dem einzigen Unterschiede, dass man, um zu den Axen des rhombischen Systems zu gelangen, anstatt der horizontalen tetragonalen Axen die Halbirenden ihrer Winkel als Axen nehmen muss. Was die Meroëdrie des tetragonalen Systems betrifft, welche G. Rose auf Grund seiner Untersuchungen am sulfaminsauren Ammon aufstellen zu müssen geglaubt hat, so haben wir uns bereits darüber ausgesprochen, dass die Messung der Winkel zu wenig genau war, um die Existenz der Eigenthümlichkeiten, welche jenen Krystallographen bewogen haben, diese Krystalle dem tetragonalen System zuzuzählen, ausser Zweifel zu setzen. Nach unserer Auffassung bieten diese Krystalle die Combination oP, P, $\not{P}\infty$ des monoklinen Systems dar, selbst wenn wirklich die Hauptaxe senkrecht zur Klinodiagonale wäre, und die Fundamentalparameter auf der Orthodiagonale und der Klinodiagonale den gleichen Werth besässen. Bekanntlich kann jede monokline Form auf rechtwinkelige Axen bezogen werden (wie es Weiss gethan hat, und wie es aus der Rationalität der Tangentenverhältnisse der Winkel zwischen den Flächen einer Zone folgt); wenn im Allgemeinen bei der Annahme solcher Axen die Zeichen der Flächen complicirter werden, als für ein passend gewähltes System schiefer Axen, so ist doch nicht einzusehen, warum in einem besonderen Falle nicht für orthogonale Axen die Zeichen der Flächen einfacher sein können. Wenn die Krystalle keine anderen Eigenschaften besitzen, welche mit der Rechtwinkeligkeit zweier Axen in Beziehung stehen, so hat der Werth von 90° keine höhere Bedeutung, als jeder andere einzelne Winkelwerth. Was die Gleichheit zweier Axen betrifft, so haben wir nur an Das zu erinnern, was weiter oben über diese Frage gesagt wurde. Die monokline Meroëdrie des rhombischen Systems, selbst im Falle, wo die Krystalle eine zu den Prismenflächen senkrechte Basis zeigen, kann keine Gruppe darstellen, welche von der holoëdrischen des monoklinen Systems verschieden wäre; aus den vorher auseinandergesetzten Gründen können

wir die Rechtwinkeligkeit der Hauptaxe und der Klinodiagonale nur als etwas Zufälliges betrachten. Das eben Gesagte lässt sich Wort für Wort auf die behauptete Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie des rhombischen Systems anwenden, welche wir nicht als eine von der Hemimorphie des monoklinen Systems verschiedene Gruppe ansehen können. In der Schlussbemerkung des Kapitels IV [62] haben wir versucht zu zeigen, dass die Existenz von Krystallen mit den charakteristischen Eigenschaften des diklinen Systems ernsten Zweifeln unterworfen sei. Was die Rechtwinkeligkeit zweier Axenebenen betrifft, so gilt das über die Rechtwinkeligkeit der Axen Gesagte auch hier. Von grösserer Wichtigkeit wäre es, wenn wirklich das Prisma, welches der Zone der beiden senkrechten Ebenen angehört, stets mit allen seinen vier Flächen ausgebildet wäre. Offen gestanden haben wir aber niemals einsehen können, dass diese Eigenthümlichkeit des Prismas eine Folge der Rechtwinkeligkeit zweier Axenebenen sein könnte, welche den Raum in vier Theile theilen, die gleich an Volum, gleich in Bezug auf die Neigungen der vier Prismenflächen zu zwei Axenebenen, aber ungleich in Bezug auf die Winkel derselben Prismenflächen mit der dritten Axenebene und ungleich in jeder anderen Beziehung sind. Ausserdem haben wir in Kapitel IV gesehen, dass von allen Krystallen, welche man in das dikline System gestellt hat, nur das ursprünglich von Mitscherlich untersuchte Salz, welches später nicht mehr hat dargestellt werden können, das Prisma stets vollständig zeigte. Wir müssen jedoch sagen: selbst in dem Falle, dass man immer die vier Flächen des Prismas zusammen beobachtet, würde darin nichts Auffallendes liegen, besonders bei einem Salze, welches auf eine bestimmte Art und unter bestimmten Verhältnissen dargestellt ist. Bekanntlich findet man sehr selten ein Quarzrhomboëder ohne die Flächen des Prismas oder diejenigen des complementären Rhomboëders, und für ein Mineral, wie der Quarz, ist doch die Anzahl der Krystalle, welche Mineralogen oder Krystallographen unter die Augen kommen, und sind die Verschiedenheiten der Umstände ihrer Bildung viel beträchtlicher, als für ein ungewöhnliches chemisches Product.

---

[63] Anhang A.

Das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse der Krystallflächen.

Bekanntlich besteht dieses Gesetz darin, dass man für jede Krystallreihe stets drei Coordinatenaxen, welche nicht in einer Ebene liegen, so wählen kann, dass, wenn man Ebenen parallel allen Flächen der Krystallreihe durch einen beliebigen Punkt auf einer der Axen oder durch die Schnittpunkte einiger dieser Ebenen mit einer zweiten Axe legt, alsdann die Parameter aller dieser Ebenen auf irgend einer der Axen in rationalen Verhältnissen stehen. In einer gegebenen Krystallreihe wollen wir »mögliche Krystallfläche« eine Ebene nennen, deren Parameter dem eben ausgesprochenen Gesetze genügen, d. h. in rationalem Verhältniss zu anderen Parametern der Flächen der Reihe auf allen drei Axen stehen.

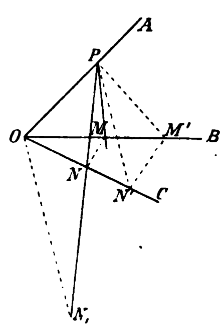


Fig. 23.

Es soll nun bewiesen werden, dass demselben Gesetze auch noch genügt wird, wenn an Stelle der ursprünglichen Coordinatenebenen irgend dreien möglichen Krystallflächen der Reihe parallele Ebenen gesetzt werden, und dass alsdann die ursprünglichen Coordinatenebenen ebenfalls mögliche Krystallflächen sind*). Es seien OA, OB und OC (Fig. 23) drei Coordinatenaxen, in Bezug auf welche das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse erfüllt ist. Zunächst ist zu beweisen, dass man eine der Coordinatenebenen, z. B. BOC, durch irgend eine mögliche Krystallfläche ersetzen kann. Diese Fläche PMN möge nicht parallel der Axe OC sein, welche sie in dem Punkte N schneidet. Die

*) Die Wichtigkeit dieses Satzes für die in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzte Theorie hat uns bestimmt, hier einen Beweis derselben zu geben. Dieser unterscheidet sich durch seine Einfachheit von demjenigen, welchen man gewöhnlich auf dem Wege der analytischen Geometrie giebt. Nach Abfassung dieser Zeilen fanden wir in der soeben erschienenen Krystallographie von Lang einen dem unsrigen analogen Beweis, welcher jedoch einerseits weniger einfach, andererseits weniger vollständig ist.

neuen Coordinatenaxen sind nun PO, PN, PM. Durch den Punkt O werde eine Ebene, parallel einer beliebigen anderen Krystallfläche, z. B. der Fläche $PN'M'$, gelegt; der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene OPN findet in der Geraden $ON_{,}$ statt, welche parallel PN' ist, und da in Folge dessen die Dreiecke PNN' und $ONN_{,}$ ähnlich sind, hat man:

$$NN_{,} : PN = ON : NN'.$$

[64] Da das zweite Verhältniss (dasjenige eines Parameters zu der Differenz zweier Parameter) rational ist, so muss dies auch das erste sein, woraus sich ergiebt, dass das Verhältniss des Parameters einer beliebigen Fläche auf der Axe PN zum Parameter der alten Coordinatenebene BOC eine rationale Zahl ist. Wenn dagegen die neue Coordinatenebene PNM parallel der Axe OC ist (Fig. 24), so ist eine der neuen Axen PN parallel der alten Axe OC, und der Parameter der alten Coordinatenebene auf dieser Axe wird unbestimmt. Es ist unschwer zu beweisen, dass selbst in diesem Falle die Parameter zweier beliebiger Krystallflächen auf dieser neuen Axe PN in einem rationalen Verhältnisse stehen. Es mögen $PN'M'$ und $PN''M''$ zwei beliebige Krystallflächen sein, deren Parameter ON' und ON'' auf der Axe OC in einem rationalen Verhältnisse stehen. Um ihre Parameter auf der Axe PN zu erhalten, legen wir durch den Punkt O zwei Gerade $ON'_{,}$ und $ON''_{,}$ parallel den Geraden PN' und PN''; die Schnittpunkte $N'_{,}$ und $N''_{,}$ dieser Geraden mit der Axe PN bestimmen die Parameter $PN'_{,}$ und $PN''_{,}$ der den Flächen $PN'M'$ und $PN''M''$ parallelen Ebenen auf der Axe PN, und da die absoluten Werthe dieser Parameter gleich denen der Parameter ON' und ON'' auf der alten Axe OC sind, so folgt daraus, dass ihr Verhältniss ein rationales ist. Damit ist also bewiesen, dass auf einer der neuen Axen die Parameter aller möglicher Krystallflächen, ebenso wie die der alten Coordinatenebene, in rationalen Verhältnissen stehen. Offenbar muss dasselbe Gesetz für die andere neue Axe PM gelten, so dass also das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse gültig sein, und die

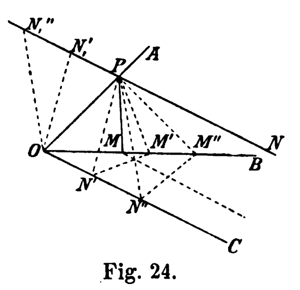


Fig. 24.

alte Coordinatenebene eine mögliche Krystallfläche sein muss. In dem eben gegebenen Beweise haben wir die Stellung der Flächen in Bezug auf die neuen Coordinatenaxen durch die Parameter bestimmt, welche sie erhalten, wenn ihnen parallel Ebenen durch den Punkt O auf der Axe PO gelegt werden. Diese Methode ist ungenügend, um die Stellung von Flächen zu bestimmen, welche der Axe PO parallel sind. Die Möglichkeit einer Fläche dieser Art in dem alten System von Coordinatenaxen ergiebt sich, wenn man parallel derselben eine Ebene $SMN'T$ durch einen Punkt M (Fig. 25) legt, in welchem irgend eine andere Fläche die Axe OB schneidet; damit alsdann die fragliche Fläche möglich sei, muss ihr Parameter ON' auf der dritten Axe OC in rationalem Verhältnisse mit den anderen Parametern auf dieser Axe stehen, z. B. mit ON. Man hat nun in derselben Weise zu prüfen, ob dem Gesetze der Rationalität der Parameterverhältnisse für die neuen Coordinatenaxen durch eine solche Fläche genügt wird. Der Parameter einer der Flächen auf der neuen Axe PM ist PM, so dass man bei Annahme der neuen Axen die Fläche $SMN'T$ in ihrer alten Stellung lassen kann; ihr Parameter auf der Axe PN [65] ergiebt sich, wenn man die zu OP parallele Gerade $N'T$ verlängert, bis sie PN in dem Punkte U schneidet. Da die Dreiecke NOP und $NN'U$ ähnlich sind, so ist ersichtlich, dass die Rationalität des Verhältnisses $PN : PU$ bestimmt wird durch diejenige des Verhältnisses $ON : ON'$.

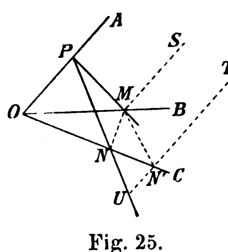


Fig. 25.

Wir haben also nun gesehen, dass, wenn dem Gesetze der Rationalität der Parameterverhältnisse für ein bestimmtes System von Coordinatenaxen genügt ist, dasselbe auch noch Gültigkeit besitzt, wenn wir eine der Coordinatenaxen durch irgend eine der möglichen Krystallflächen der fraglichen Krystallreihe ersetzen. In derselben Weise kann man auch die zweite und die dritte der alten Coordinatenebenen durch neue Flächen ersetzen, und daraus ergiebt sich, dass jeder Durchschnitt zweier beliebiger möglicher Krystallflächen als Coordinatenaxe genommen werden kann, und dass in Bezug auf diese Axe das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse gelten muss.

Indem wir in dem vorhergehenden Beweise eine der Coordinatenebenen durch eine neue Ebene ersetzten, haben wir zugleich, behufs Vereinfachung des Beweises, den Anfangspunkt der Coordinaten verändert. Es ist leicht zu zeigen, dass unser Satz auch dann gültig bleibt, wenn der alte Ursprung beibehalten wird, oder wenn man den neuen Ursprung in einen beliebigen Punkt des Raumes verlegt. Um sich davon zu überzeugen, hat man sich nur zwei bestimmte Constructionen vorzustellen; in der ersten wählt man die Lage der Flächen so, wie es nöthig ist, um das Gesetz der Rationalität der Parameterverhältnisse in Bezug auf die alten Axen zu verwirklichen, während man in der zweiten Construction jenen Flächen parallele Ebenen so legt, dass dasselbe Gesetz für die neuen Axen zur Geltung kommt. Alsdann kann man sich die zweite Construction so verschoben denken, dass die Flächen ihrer ersten Stellung parallel bleiben, und der Ursprung mit irgend einem Punkte des Raumes oder auch mit dem Anfangspunkte der Coordinaten der ersten Construction zusammenfällt. Es wird auf diese Art ersichtlich, dass, wenn man durch einen beliebigen Punkt im Raume Ebenen parallel allen möglichen Flächen einer bestimmten Krystallreihe legt, alle Geraden, in welchen diese Flächen einander schneiden, die Eigenschaften von Coordinatenaxen haben werden, d. h.: wenn wir durch einen, auf einer dieser Axen beliebig angenommenen Punkt Ebenen parallel allen möglichen Flächen der fraglichen Reihe legen, so werden die Parameter aller dieser Ebenen auf jeder dieser Axen in rationalen Verhältnissen zu einander stehen. Wir werden daher mit dem Namen *mögliche krystallographische Axe* in einer Krystallreihe jeden Durchschnitt zweier möglicher Krystallflächen dieser Reihe bezeichnen. Die Eigenschaften, welche diesen möglichen krystallographischen Axen zukommen, sind soeben auseinandergesetzt worden.

Es erübrigt nun noch zu beweisen, dass eine Ebene, welche durch irgend zwei beliebige [66] krystallographische Axen einer bestimmten Krystallreihe hindurchgeht, stets eine mögliche Krystallfläche dieser Reihe sein muss*). Es sei die Axe OA (Fig. 26) der Durchschnitt zweier möglicher

---

*) Dies ist ebenfalls ein bekannter Satz, welchen man gewöhnlich so ausspricht: jede in zwei gegebenen Zonen liegende Ebene ist eine mögliche Krystallfläche.

Flächen P und Q, und OA' der Durchschnitt zweier anderer möglicher Flächen P' und Q'. Als Coordinatenebenen mögen die Flächen P und P' und noch irgend eine beliebige andere Fläche genommen werden. Es sei in der Figur MOS die Fläche P, MOT die Fläche P' und SOT die dritte Coordinatenebene. Durch einen, auf dem Durchschnitt von P und P' angenommenen Punkt M legen wir Ebenen parallel den Flächen Q und Q'; diese werden die Ebenen P und P' in den Geraden MS, parallel OA, und MT, parallel OA', schneiden. Nun ist aber klar, dass die Ebene MST, welche parallel der durch OA und OA' gehenden Ebene ist, auf den Axen OS und OT die Parameter OS und OT hat, welche den Parametern der Flächen Q und Q' auf denselben Axen gleich sind, und dass in Folge dessen die Ebene MST einer möglichen Krystallfläche parallel ist. Wenn einer der Punkte S und T, z. B. S, mit O zusammenfällt, bleibt der Satz immer noch richtig, weil alsdann die Ebene MST mit der Fläche P' identisch ist. Wenn gleichzeitig beide Punkte S und T mit dem Punkte O zusammenfallen, so wird der Satz dadurch nicht ungültig, weil alsdann die beiden Axen OA und OA' in eine einzige zusammenfallen, so dass die Bedingungen des Satzes nicht mehr erfüllt sind.

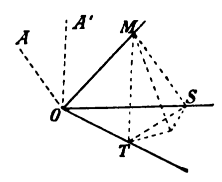


Fig. 26.

Anhang B.

Wenn n eine ganze Zahl ist, so wird $\cos\frac{2\pi}{n}$ *nur dann commensurabel mit der Einheit, wenn sein absoluter Werth eine der Zahlen* 0, $\frac{1}{2}$ *oder* 1 *ist*).*

Bekanntlich ist

$$\left.\begin{aligned} 2^{2n-1}\cos^{2n}x = \cos 2nx &+ (2n)_1 \cos(2n-2)x + \\ &+ (2n)_2 \cos(2n-4)x + \ldots + \\ &+ (2n)_{n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2}(2n)_n \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

*) Der Beweis dieses Satzes wurde dem Verf. durch Herrn N. Boudaief mitgetheilt.

$$\left.\begin{aligned}2^{2n}\cos^{2n+1}x = {} & \cos(2n+1)x + (2n+1)_1\cos(2n-1)x + \\ & + (2n+1)_2\cos(2n-3)x + \ldots\ldots + \\ & + (2n+1)_n\cos x \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(2)$$

Es wird hier das Symbol m_k angewendet, um den Binomialcoëfficienten

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,k}$$

zu bezeichnen. Setzt man für n in den Gleichungen (1) und (2) nach einander die Zahlen: 1, 2, 3 u. s. f., so kann man successive $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$ u. s. w. in [67] Functionen von $\cos x$ bestimmen. Offenbar werden diese Functionen die folgende Form besitzen:

$$\left.\begin{aligned}\cos 2mx = {} & A_{2m}\cos^{2m}x + A_{2m}^{(1)}\cos^{2m-2}x + \\ & + A_{2m}^{(2)}\cos^{2m-4}x + \ldots\ldots + \\ & + A_{2m}^{(m-1)}\cos^2 x + A_{2m}^{(m)} \ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(2m+1)x = {} & B_{2m+1}\cos^{2m+1}x + \\ & + B_{2m+1}^{(1)}\cos^{2m-1}x + B_{2m+1}^{(2)}\cos^{2m-3}x + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_{2m+1}^{(m)}\cos x \ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Die Grössen A und B hängen nicht von x ab, und ihre Werthe können durch die Methode der unbestimmten Coëfficienten erhalten werden. In der That geben, auf Grund von (3) und (4), die Gleichungen (1) und (2) (wenn man $\cos x = y$ setzt):

$$\left.\begin{aligned}2^{2n-1}y^{2n} = {} & A_{2n}^{k}y^{2n} + A_{2n}^{(1)}y^{2n-2} + A_{2n}^{(2)}y^{2n-4} + \\ & + \ldots + A_{2n}^{(n-1)}y^2 + A_{2n}^{(n)} \\ & + (2n)_1\Big[A_{2n-2}y^{2n-2} + A_{2n-2}^{(1)}y^{2n-4} + \\ & + \ldots + A_{2n-2}^{(n-2)}y^2 + A_{2n-2}^{(n-1)}\Big]\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$+ (2n)'_2 \left[A_{2n-4}\, y^{2n-4} + \dots + A_{2n-4}^{(n-3)} y^2 + A_{2n-4}^{(n-2)}\right]$$

$$- \dots\dots\dots$$

$$- (2n)'_{n-1} \left[A_2 y^2 - A_2^{(1)}\right]$$

$$- \tfrac{1}{2} (2n)'_n$$

$$2^{2n} y^{2n+1} = B_{2n+1} y^{2n+1} - B'_{2n+1} y^{2n-1} + B''_{2n+1} y^{2n-3} - \dots - B^{(n)}_{2n+1} y$$

$$- (2n+1)'_1 \left[B_{2n-1} y^{2n-1} - B'_{2n-1} y^{2n-3} - \dots - B^{(n-1)}_{2n-1} y\right]$$

$$- (2n+1)'_2 \left[B_{2n-3} y^{2n-3} - \dots - B^{(n-2)}_{2n-3} y\right] \qquad (6)$$

$$- \dots\dots$$

$$- (2n+1)'_n y$$

Aus der Bedingung der Gleichheit der Coefficienten gleicher Potenzen von y ergiebt sich

$$2^{2n} = A_{2n}$$

[illegible] (7)

$$\left.\begin{aligned}
2^{2n} &= B_{2n+1} \\
0 &= B^{(1)}_{2n+1} + (2n+1)_1 B_{2n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 &= B^{(n)}_{2n+1} + (2n+1)_1 B^{(n-1)}_{2n-1} + \\
&+ (2n+1)_2 B^{(n-2)}_{2n-3} + \dots + (2n+1)_{n-1} B^{(1)}_3 + \\
&\qquad + (2n+1)_n
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

[68] *Die Gleichungen* (7): Aus der ersten derselben folgt: $A_{2n} = 2^{2n-1}$, und hieraus ergiebt sich: $A_{2n-2} = 2^{2n-3}$, $A_{2n-4} = 2^{2n-5}$ u. s. w.; alsdann giebt die zweite Gleichung: ... $A^{(1)}_{2n} = C_1 \cdot 2^{2n-3}$, wo C_1 eine ganze Zahl ist; daraus folgt, dass $A^{(1)}_{2n-2} = C_1' \cdot 2^{2n-5}$, $A^{(1)}_{2n-4} = C_1'' \cdot 2^{2n-7}$ u. s. f., wo C_1', C_1'' etc. ganze Zahlen sind; alsdann giebt die dritte Gleichung: $A^{(2)}_{2n} = C_2 \cdot 2^{2n-5}$, wo C_2 eine ganze Zahl ist, und so weiter. Die vorletzte Gleichung ergiebt: $A^{(n-1)}_{2n} = C_{n-1} \cdot 2$, wo C_{n-1} eine ganze Zahl ist. Endlich giebt offenbar die letzte Gleichung für $A^{(n)}_{2n}$ einen Werth, welcher eine bestimmte ganze Zahl C_n darstellt.

Die Gleichungen (8) ergeben: $B_{2n+1} = 2^{2n}$, $B^{(1)}_{2n+1} = D_1 \cdot 2^{2n-2}$, $B^{(2)}_{2n+1} = D_2 \cdot 2^{2n-4}$, ..., $B^{(n-1)}_{2n+1} = D_{n-1} 2^2$, $B^{(n)}_{2n+1} = D_n$, wo die Grössen D ganze Zahlen sind.

Wenn man in den für sämmtliche A und B gefundenen Werthen m anstatt n einsetzt und die alsdann für die Grössen C und D resultirenden Ausdrücke mit G und H bezeichnet, so giebt die Einsetzung dieser Werthe in die Gleichungen (3) und (4):

$$\begin{aligned}
\cos 2mx = 2^{2m-1} \cos^{2m} x &+ G_1 \cdot 2^{2m-3} \cos^{2m-2} x + \\
&+ G_2 \cdot 2^{2m-5} \cos^{2m-4} x + \dots + \\
&+ G_{m-1} \cdot 2 \cos^2 x + G_m;
\end{aligned}$$

$$\cos(2m+1)x = 2^{2m}\cos^{2m+1}x + H_1\cdot 2^{2m-2}\cos^{2m-1}x + \\ + H_2\cdot 2^{2m-4}\cos^{2m-3}x + \ldots\ldots + \\ + H_{m-1}\cdot 2^2\cos^3 x + H_m\cos x.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit 2 und setzt $2\cos x = z$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 2\cos 2mx = z^{2m} + G_1 z^{2m-2} + G_2 z^{2m-4} + \ldots + \\ + G_{m-1}z^2 + 2G_m; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\cos(2m+1)x = z^{2m+1} + H_1 z^{2m-1} + H_2 z^{2m-3} + \\ + \ldots + H_{m-1}z^3 + H_m z; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wo die Grössen G und H von z unabhängige ganze Zahlen sind.

Ferner soll in der Gleichung (9) gesetzt werden: $2mx = 2\pi$, woraus sich ergiebt: $z = 2\cos\frac{2\pi}{2m}$, während in der Gleichung (10) gesetzt werden soll: $(2m+1)x = 2\pi$; letzteres giebt $z = 2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$. Für diese speciellen Fälle reduciren sich die Gleichungen (9) und (10) auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} z^{2m} + G_1 z^{2m-2} + G_2 z^{2m-4} + \ldots + G_{m-1}z^2 + \\ + 2(G_m - 1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} z^{2m+1} + H_1 z^{2m-1} + H_2 z^{2m-3} + \ldots + H_m z - 2 \\ = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

In diesen Gleichungen sind alle Coëfficienten ganze Zahlen, und der erste Coëfficient jeder Gleichung ist gleich der Einheit. Es folgt daraus, [69] dass die mit der Einheit commensurabeln Wurzeln nur ganze Zahlen sein können. Da aber $z = 2\cos\frac{2\pi}{2m}$ für die Gleichung (11) und $= 2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$ für die Gleichung (12) ist, so kann sein absoluter Werth nicht über 2 sein; es ergiebt sich daraus, dass z keine anderen, mit der Einheit commensurabeln Werthe haben kann, als 0, ± 1, ± 2. Also können die Cosinus der Bögen von der Form $\frac{2\pi}{n}$, wo n eine ganze Zahl ist, nur dann mit der Einheit commensurabel sein, wenn sie einen der Werthe 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 besitzen. Andererseits ist es leicht einzusehen, dass die Bögen,

welche π nicht überschreiten, und deren Cosinus einen der Werthe 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 besitzen, von der Form $\frac{2\pi}{n}$ sind.

Bemerkungen. Setzt man in der Gleichung (9) $2mx = k\pi$ und in der Gleichung (10) $(2m+1)x = k\pi$, so schliesst man durch ein dem vorhergehenden analoges Verfahren, dass der Cosinus oder der Sinus eines Bogens von der Form $\frac{k\pi}{n}$, wo k und n ganze Zahlen sind, mit der Einheit nur commensurabel sein kann, wenn er einen der Werthe: 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 besitzt.

Die Coëfficienten in den Formeln (3) und (4) bestimmen sich durch folgende Formeln:

$$A_{2m}^{(k)} = (-1)_k \left[(2m-k)_k + (2m-k-1)_{k-1}\right] \cdot 2^{2m-2k-1};$$

$$B_{2m}^{(k)} = (-1)_k \left[(2m-k+1)_k + (2m-k)_{k-1}\right] \cdot 2^{2m-2k}.$$

[70] Erklärung der Figuren *).

Die Mehrzahl der Figuren sind stereographische Projectionen von Punkten und Kreisen, welche auf einer Kugeloberfläche liegen, auf die Ebene der Zeichnung. In allen Figuren ist der umhüllende Kreis der Durchschnitt der Kugelfläche mit der Ebene des Papiers, welche zugleich diejenige der Projection ist. Irgend ein Punkt der Kugeloberfläche wird auf die Zeichnungsebene projicirt durch eine Gerade, welche denselben mit dem entfernteren Pole der Projectionsebene verbindet. Der Ort einer Krystallfläche wird bestimmt durch den Berührungspunkt derselben oder ihrer Parallelen mit der Kugeloberfläche; diese Tangentialebene muss immer so gelegt werden, dass ihre Normale, nach dem Centrum der Kugel gezogen, nach derjenigen Seite der Fläche gerichtet ist, wo sich die Substanz des Krystalls befindet. In allen Figuren, wo ein Unterschied zwischen den Tangentialebenen der oberen Hälfte (über der Papierfläche) und der unteren Hälfte der Kugel zu machen ist, sind die Berührungspunkte der ersteren durch ein Kreuz, die der letzteren durch einen kleinen Kreis bezeichnet. Wenn die Punkte zweier Berührungsebenen, ein oberer und ein unterer, sich auf dem Papier in demselben Punkte projiciren, so ist letzterer durch ein Kreuz, umgeben von einem kleinen Kreise, markirt; dies ist der Fall, wenn die beiden Flächen symmetrisch in Bezug auf die Projectionsebene gestellt sind. Die Lage der durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Geraden wird durch die Punkte dargestellt, in welchen sie die Oberfläche der Kugel schneiden. Wenn diese Geraden Deckaxen sind, haben wir in gewissen Fällen die Art derselben durch besondere Zeichen, welche an den der

*) Im Original sind sämmtliche Figuren auf Tafeln vereinigt. In vorliegender deutscher Ausgabe ist dies nur mit den Figg. 27—58 (genau in der Anordnung der drei letzten Tafeln des Originals geschehen, während die Figg. 1—26 der grösseren Bequemlichkeit wegen in den Text eingefügt worden sind.

Richtung der Axen entsprechenden Punkten angebracht wurden, charakterisirt; so bezeichnet ein Oval eine Axe von 180°, ein Quadrat eine Axe von 90°, ein Dreieck eine Axe von 120° und ein Sechseck eine Axe von 60°. In gewissen Fällen wurden auch bestimmte Ebenen, wie die Symmetrieebenen und andere imaginäre Ebenen, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, durch die Projection ihres Durchschnittes mit der Kugeloberfläche bezeichnet. Alle Symmetrieebenen sind durch ausgezogene Linien markirt. In den Figg. 27—58 (s. die Tafeln) dienen die Punkte, welche die Flächen der allgemeinen Form angeben, zugleich dazu, die allgemeine Anordnung gleichwerthiger Richtungen anzugeben. Die deckbar gleichen Richtungen sind durch den gleichen Buchstaben, *a* oder *b*, bezeichnet, während eine mit *b* bezeichnete Richtung symmetrisch gleich ist einer mit *a* bezeichneten. Von diesen selben Richtungen sind diejenigen, welche vom Centrum der Kugel nach einem der Punkte ihrer [**71**] unteren Hälfte gehen, mit *a'* und *b'* bezeichnet. In denselben Figuren haben wir auch die Orientirung der für die Krystallsysteme charakteristischen Axen, wie sie Naumann angenommen hat, angegeben. In allen diesen Figuren, ausgenommen Fig. 57 und 58, welche dem triklinen System entsprechen, projicirt sich eine dieser krystallographischen Axen in das Centrum der Figur, während die anderen in die Projectionsebene fallen, wo sie durch Pfeile bezeichnet sind. In den Fig. 57 und 58 sind zwei der Axen, welche in der zur Projectionsebene gewählten Ebene liegen, ebenfalls durch Pfeile bezeichnet, während die dritte Axe, welche mit dieser Ebene einen schiefen Winkel bildet, in der Figur nicht bezeichnet ist.

Anmerkungen.

Unter den Arbeiten, welche wesentlich zu der in neuester Zeit erreichten, definitiven Feststellung der Systematik der Krystalle beigetragen haben, gehört in erster Linie diejenige des im Jahre 1894 als Akademiker in St. Petersburg verstorbenen finnländischen Mineralogen Axel Gadolin, wenn dieser auch nicht der Erste gewesen ist, welcher erkannte, dass lediglich auf Grund des von Hauy entdeckten Erfahrungsgesetzes der Rationalität der Indices, ohne irgend welche Annahme über die Molecularstructur der Krystalle, sich der Nachweis führen lasse, dass es nur 32 Klassen von Krystallen, welche sich durch ihre ganz bestimmte Art der Symmetrie von einander unterscheiden, geben könne. Dieses Verdienst gebührt, wie L. Sohncke nachgewiesen hat*), dem Marburger Mineralogen J. F. Chr. Hessel, welcher in dem Artikel »Krystall« in Gehler's Physikal. Wörterbuche 1830, 5, 1023—1340**) zuerst das wahre Eintheilungsprincip der Krystalle erkannt und die allein möglichen 32 Klassen aufgestellt hat, indem er zunächst ganz allgemein (ohne Einschränkung auf die Krystalle) alle möglichen Arten der Symmetrie, welche irgend ein geometrisches Gebilde darbieten kann, aufsuchte, und dann durch Beschränkung auf diejenigen Formen, welche dem Gesetze der Rationalität der Indices gehorchen, die an den Krystallen möglichen Symmetriearten feststellte. Diese ihrer Zeit weit voraneilende Arbeit ist jedoch leider, wohl wesentlich ihrer sehr umfangreichen und z. Th. schwerfälligen Entwickelungen wegen, 60 Jahre lang unbeachtet geblieben.

*) Zeitschrift für Krystallographie 1891, 18, 486.

**) Auch einzeln erschienen u. d. T.: Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie. Leipzig 1831.

Nach einer viel eleganteren Methode behandelte 1849 Bravais (Abhandlung über die Polyëder von symmetrischer Form. Ostwald's Klassiker Nr. 17) die möglichen Symmetriearten von Polyëdern, übersah aber bei dieser Untersuchung eine derselben, nämlich diejenige, welche Hessel »Gerenstelligkeit« genannt hatte (Gadolin bezeichnet sie als »sphenoidische Symmetrie«). Als er dann später seine Resultate auf die krystallographischen Polyëder anwandte (Etudes cristallographiques 1851), fehlte in Folge dessen eine mögliche Klasse, die sphenoidische Tetartoëdrie des tetragonalen Systems, wie Bravais übrigens selbst erkannte, und welche er dann, ohne die Nothwendigkeit ihrer Existenz zu beweisen, als eine immerhin mögliche in seine schliessliche Zusammenstellung der Krystallklassen aufnahm.

Offenbar ohne Kenntniss jener beiden Publicationen unternahm nun Gadolin i. J. 1867 die hier in deutscher Bearbeitung vorliegende, erst 1871 in den »Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Helsingf. T. IX, S. 1 ff.« erschienene Arbeit. Indem er das Rationalitätsgesetz der Parameterverhältnisse von vorn herein einführte, beschränkte er seine Untersuchung lediglich auf die Krystalle. Da dieselbe aber hierdurch an Einfachheit erheblich gewonnen hat, so dass sie nur sehr elementare mathematische Kenntnisse voraussetzt, und da die von Gadolin eingeführte Art der Darstellung der Symmetrieverhältnisse durch stereographische Projectionen die hier besonders in Betracht kommende Anschauung ganz ausserordentlich erleichtert*), so dürfte seine Beweisführung von den bisher veröffentlichten diejenige sein, aus welcher auch der der Krystallographie ferner Stehende am ehesten sich die Ueberzeugung verschaffen kann, dass die Frage nach den möglichen Symmetriearten der Krystalle jetzt als eine gelöste zu betrachten ist.

Der Umstand, dass Gadolin's Arbeit in Folge der geringen Verbreitung der cit. Zeitschrift bisher nur Wenigen zugänglich war, hat es offenbar veranlasst, dass die Resultate derselben erst ganz allmählich bekannt wurden, nachdem inzwischen

---

*) Mit Hülfe dieser Projectionen kann sogar ein Theil der Gadolin'schen Beweise für gewisse Fälle ganz entbehrt werden, da für diese die Richtigkeit der betreffenden Sätze direct aus der Construction hervorgeht, ein Verfahren, von welchem der Herausgeber bei der Behandlung der Krystallklassen in seiner »Physikal. Krystallographie«, 3. Aufl., ausgedehnten Gebrauch gemacht hat.

noch andere Forscher auf anderem, weniger einfachem Wege zu genau denselben Ergebnissen gelangt waren. So nahm P. Curie 1884 die allgemeine Bravais'che Untersuchung von Neuem auf und führte sie, indem er auch die sphenoidische Symmetrie, von ihm »alternirende Symmetrie« genannt, berücksichtigte, nunmehr lückenlos durch, während Minnigerode 1887 die Frage vom Standpunkte der Gruppentheorie aus behandelte. Gleichzeitig mit Letzterem leitete E. von Fedorow in seiner i. J. 1889 russisch erschienenen Abhandlung »über die Symmetrie der endlichen Figuren« (Verhandl. d. k. russ. min. Gesellsch. **25**, 1—52) aus den von Euler gegebenen Grundsätzen der Kinematik alle überhaupt möglichen Symmetriearten ab, aus denen man dann durch Einsetzung des Rationalitätsgesetzes die 32 Klassen der Krystalle ohne Weiteres als specielle Fälle erhält. Noch einfacher (aber wegen der räumlichen Vorstellungen vielleicht etwas schwieriger verständlich) war die gleiche Aufgabe nach rein synthetischer Methode von demselben Verf. gelöst worden im III. Abschnitt seiner i. J. 1885 ebenfalls russisch erschienenen Abhandlung »Elemente der Gestaltenlehre« (Ebenda, **21**, X, 1—279), von welcher er später einen deutschen Auszug in der Zeitschr. f. Krystallographie **21**, 679—694 veröffentlichte. Ebenfalls mit elementaren Hülfsmitteln hat endlich die 32 Klassen der Krystalle A. Schoenflies im ersten Theile seines Werkes »Krystallsysteme und Krystallstructur« 1891 entwickelt. Eine Vergleichung der Resultate dieser Untersuchung mit den seinigen gab Fedorow in der Zeitschr. f. Kryst. **20**, 25 f., auf welche, wie auf das vorher erwähnte Werk, besonders verwiesen sei in Betreff des Begriffes der »Symmetrie«. Auf einige Punkte, in welchen die von diesen Forschern adoptirten Definitionen derselben von denen Gadolin's abweichen, und auf Grund deren manche seiner Entwickelungen durch noch strengere oder einfachere ersetzt werden können, soll in den folgenden Anmerkungen hingewiesen werden.

Einleitung. In wörtlicher Uebertragung ist für »directions égaux« »gleiche Richtungen« gesetzt worden, während in deutschen krystallographischen Werken der Ausdruck »gleichwerthige Richtungen« üblicher ist. Statt des vom Verfasser gewählten und darum beibehaltenen Namens »Gruppe« dürfte der von Bravais, Sohncke, Schoenfliès u. A. gebrauchte Name »Klasse« entschieden vorzuziehen sein.

Kapitel I. § 1 u. 2. Die Ausdrücke »égalité de coincidence« und »égalité symmétrique« sind durch »Deckgleichheit« und »symmetrische Gleichheit« wiedergegeben worden, und ebenso ist in wörtlicher Uebersetzung für »axe à coincidence« der bereits von mehreren Autoren verwendete, sehr treffende Name »Deckaxe« adoptirt worden, während in den meisten krystallographischen Schriften, nach dem Vorgange Bravais's, derartige Richtungen mit dem Namen »Symmetrieaxen« bezeichnet werden. Dem entsprechend sind die Namen »Axe von 60°, 90°, 120°, 180°« statt der von Bravais eingeführten »senäre (hexagonale), quaternäre (tetragonale), ternäre (trigonale), binäre (rhombische) Axe« oder der von Sohncke vorgeschlagenen, vortrefflichen deutschen Namen »sechszählige, vierzählige, dreizählige, zweizählige Axe« beibehalten worden.

§ 3. Der von Gadolin ausnahmslos gebrauchte Ausdruck »mögliche krystallographische Axe« ist gleichbedeutend mit »mögliche Kante des Krystalls«.

Kapitel III. § 13. Die sehr complicirte Entwickelung dieses Paragraphen kann ersetzt werden durch eine viel einfachere, da die verschiedenen, hier aufgestellten Gesetze der Symmetrie, dasjenige des Parallelismus, das der sphenoidischen Symmetrie u. s. w. sich auf ein einziges Gesetz zurückführen lassen, welches bereits Hessel erkannt und als »Gerenstelligkeit« bezeichnet hat; es ist identisch mit Curie's alternirender und Fedorow's zusammengesetzter Symmetrie. Dieselbe kommt einem Polyëder zu, wenn dieses durch die Combination einer Drehung um eine Axe mit einer Spiegelung nach der dazu senkrechten Ebene mit sich selbst zur Deckung gelangt. Gadolin's »imaginäre Deckaxe« ist Nichts anderes, als die Axe der zusammengesetzten Symmetrie; ist der Drehungswinkel um die letztere $= 0$, so findet nur Spiegelung statt, d. h. es ergiebt sich die Symmetrieebene (Ebene der directen Symmetrie), welche Gadolin bei $\alpha = 180^\circ$ erhält; ist jene Axe zweizählig (Drehung $= 180^\circ$), so resultirt das Gesetz des Parallelismus, $\alpha = 0$, d. i. Bravais's Centrum der Sym-

metrie; ist sie vierzählig ($\alpha = 90^{\circ}$), so liegt der specielle Fall der sphenoidischen Symmetrie (der von Bravais übersehene Fall, s. S. 87) vor; für $\alpha = 60^{\circ}$ entspricht die imaginäre Axe Gadolin's einer dreizähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie, d. h. sie führt zur Combination einer dreizähligen Axe der directen Symmetrie mit einer Symmetrieebene; endlich ist die imaginäre Axe von 120° identisch mit einer sechszähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie. Durch Einführung dieses letzteren Begriffes statt der von Gadolin angenommenen Einzelgesetze würde natürlich an die Stelle der Beweisführung der §§ 14—18 eine z. Th. andere, wohl erheblich übersichtlichere, zu treten haben. Jedoch muss bemerkt werden, dass die in § 16 gegebene Ableitung neuer Klassen aus den elf, auf den drei Tafeln die vorderste Columne bildenden Klassen von Krystallen, welche nur Deckaxen besitzen, die denkbar einfachste und eleganteste ist.

Kapitel IV. In der hier gegebenen Zusammenstellung ist für jede Gruppe die Anzahl der deckbar gleichen und symmetrisch gleichen Richtungen aufgeführt; diese entsprechen Flächen der allgemeinen Form, deren (ebene) Kantenwinkel im ersteren Falle in demselben Sinne, im zweiten im entgegengesetzten Sinne, angeordnet sind. In allen Gruppen, in denen es nur deckbar gleiche Richtungen giebt, entsprechen die symmetrisch gleichen einer zweiten, zur ersten enantiomorphen Form.

A. *Das reguläre System.* Die »Hemiëdrie nach den abwechselnden einzelnen Flächen« ist von Tschermak am Chlorammonium nachgewiesen worden.

B. *Das tetragonale System. Anmerkung.* Die Zurechnung des Wulfenit zur trapezoëdrischen Hemiëdrie ist ein Irrthum; derselbe gehört in die unter 7) aufgeführte Hemimorphie. Für beide Hemimorphien sind seitdem Repräsentanten gefunden worden, aber noch keiner für die sphenoidische Tetartoëdrie, wenn nicht der Harnstoff hierhergehört (s. Groth, Physikal. Krystallograph., 3. Aufl. S. 416); hemimorph, wie Werther angenommen hat, ist er jedenfalls nicht, da er nach der Hauptaxe keine polare Pyroëlektricität zeigt (Beobachtung des Herausgebers). Der Guarinit ist inzwischen als rhombisch erkannt worden.

C. *Das hexagonale System.* Für die trapezoëdrische Hemiëdrie sind inzwischen einige Beispiele durch Traube nachgewiesen worden; als ein solches der Hemimorphie der

pyramidalen und trapezoëdrischen Hemiëdrie wurde der Nephelin von Baumhauer erkannt. Endlich ist auch die Hemimorphie der Tetartoëdrie beobachtet worden und zwar am überjodsauren Natrium (Groth).

Die Auseinandersetzung unter 8) (S. 39 und 40) kann als ein vortreffliches Beispiel dafür dienen, dass die ganz überflüssigen Begriffe der Hemiëdrie, Hemimorphie etc. die richtige Auffassung der krystallographischen Gesetze nur zu erschweren im Stande sind. Leitet man, wie es der Herausgeber in der 3. Aufl. seiner Physikal. Krystallographie gethan hat, die complicirteren Formen von den einfacheren ab, oder richtiger die Formen einer jeden Klasse direct aus deren Symmetrieverhältnissen, so sind alle derartigen Auseinandersetzungen völlig gegenstandslos.

D. *Das rhombische System.* Von den meisten der, zu der (unmöglichen) monoklinen Meroëdrie Naumann's gerechneten Substanzen ist inzwischen ihre Zugehörigkeit zu anderen Klassen nachgewiesen worden. Die bei der Hemimorphie der sphenoidischen Hemiëdrie erwähnten Körper haben sich sämmtlich als monoklin krystallisirend erwiesen.

E. *Das monokline System.* Die Hemiëdrie (2) ist seitdem an mehreren Beispielen beobachtet worden (zuerst von Fock am tetrathionsauren Kalium).

F. *Das trikline System, 2) die Hemiëdrie.* Die Vermuthung Gadolin's, dass das von Scacchi beschriebene saure weinsaure Strontium hierher gehöre, ist vollkommen richtig (vergl. Groth, Physikal. Krystallogr. S. 339). In dieselbe Klasse ist auch das in der *Anmerkung* erwähnte unterschwefligsaure Calcium zu stellen.

Kapitel V. Der Begriff der »irrationalen Axe von 180°« und die zu demselben führenden Auseinandersetzungen scheinen dem Herausgeber überflüssig zu sein, da in jeder Krystallreihe mit einer Deckaxe zwei zu derselben geneigte Flächen mit rationalen Indices, deren Durchschnitt ebenfalls zur Deckaxe geneigt ist, wenn auch nicht vorhanden, so doch möglich sind. Dann ist aber nothwendig die zu einer Deckaxe von 180° senkrechte Ebene eine mögliche Krystallfläche. Der Satz am Schlusse von § 26 ist nur ein anderer Ausdruck des Gesetzes der Rationalität der Indices und kein besonderes Naturgesetz. Ferner dürfte die Gleichwerthigkeit (wie sie Gadolin definirt) zweier krystallographischer Axen, welche durch Drehung um eine Deckaxe zusammenfallen, schon in

dem Begriffe der Symmetrie (der für die Krystalle zugleich eine physikalische Bedeutung hat) genügend begründet sein, und es würden dann auch die Zweifel fortfallen, welche in neuerer Zeit gegen die Nothwendigkeit, dass eine Deckaxe von 120° eine mögliche krystallographische Axe sein müsse, geäussert worden sind, weil dann jedenfalls die Grössen a, b, c (s. § 29) rationale sind. Der die dreizählige Axe betreffende Abschnitt, § 28 f., ist übrigens bereits Gegenstand einer besonderen Kritik von Seiten E. von Fedorow's gewesen (Zeitschr. f. Krystallogr. **23**, 109 f.); besonders missverständlich ist der § 30 mit der Bezugnahme auf das Gesetz der rationalen Verhältnisse der Tangenten zwischen den Flächen einer Zone, welches bekanntlich kein allgemeines Gesetz ist. Zu § 31 ist endlich noch zu bemerken, dass die Möglichkeit rechtwinkeliger Axen in Krystallen des triklinen Systems auch durch die einfache Betrachtung ausgeschlossen wird, der zu Folge diese Winkel mit der Temperatur veränderlich sind. In Folge der ungleichen Ausdehnung durch die Wärme können in einem rhombischen Krystall (vergl. S. 64) zwar zufällig zwei Axen, aber niemals alle drei bei derselben Temperatur den gleichen Werth annehmen.

Kapitel VII. Auch zu der, äusserst lichtvollen, allgemeinen Darstellung der Unterschiede zwischen der neuen Klassification von der alten, hauptsächlich durch Naumann begründeten, kann nur das Eine bemerkt werden, dass die S. 71 gegebene Betrachtung noch wesentlich vereinfacht würde durch den Hinweis auf die Verhältnisse der thermischen Ausdehnung der Krystalle, denen gemäss zwei Parameter, die nicht physikalisch gleichwerthig sind, in rationalem Verhältniss nur vorübergehend bei einer bestimmten Temperatur stehen können. Die gleiche Betrachtung lässt sich ebenso auf die Rechtwinkeligkeit monokliner Axen (s. S. 72) anwenden, um klar zu machen, dass hier der Werth 90° keine höhere Bedeutung hat, als irgend ein anderer Winkelwerth.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Fig. 27
I. Alternirende
§ 10, 2)

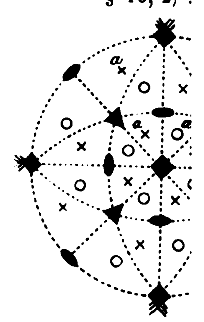


Fig. 29.
I. Tetartoë

Fig. 38.
IV. Hemiëdri
§ 10, 3) A.

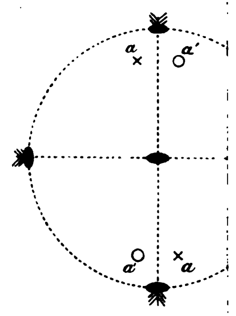


Fig. 41.
V. Hemimorphi
§ 12.



Fig. 50. III. Hemimorph
der trapezoëdr. und pyram
Hemiëdrie. § 12.

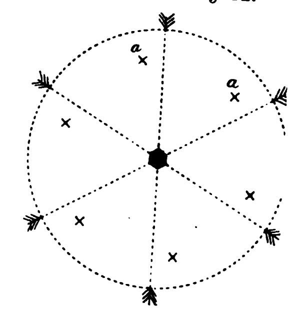


Fig. 53.
III. Tetartoëdr. Hemimorph
§ 12.

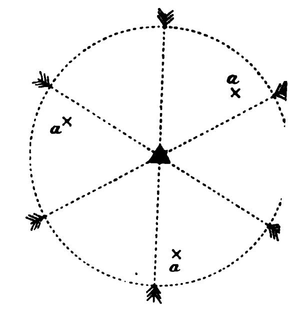
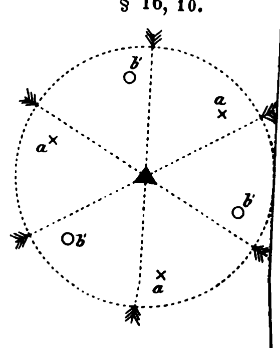


Fig. 56.
III. Rhomboëdr. Tetartoëd
§ 16, 10.



Nr. 9. H. Hess, Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald
» 22. Woehler u. Lieb ... nzoesäure. (1832.)
» 26. Jus ...
» 27. Re ...
» 28. L. ...
» 29. L. ...
» 30. S. ...
» 42. Al ...
» 45. Hu ...
» 58. Ca ...
» 66. J. ...
» 68. L ...
» 72. G ...
» 74. C ...
» 75. A ...



